Interpolacja – teoria

Zadanie interpolacji polega na określeniu parametrów $a_i$ tak, żeby dla $n$+1 danych par ($x_i$, $y_i$) ($i$ = 0, 1, 2, …, $n$) liczb rzeczywistych, bądź zespolonych takich, że $x_i \neq x_k$ dla $i \neq k$ zachodziło:

$$\Phi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_n) = y_i, \text{ dla każdego } i = 0, 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

gdzie: $\Phi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ oznacza funkcję zmiennej $x$ zależną od ($n$+1) parametrów $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Punkty $x_i$ nazywamy węzłami interpolacji,
$y_i$ są wartościami interpolowanej funkcji w węzłach $x_i$,

$$S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_i \neq x_k \text{ dla } i \neq k \} \qquad (2)$$

nazywamy siatką.

W zależności od charakteru funkcji $\Phi$ rozróżniamy różne typy interpolacji, np.: interpolację wielomianową, czy trygonometryczną.

**Wzór interpolacyjny Lagrange'a:**

Wzór ten otrzymujemy rozwiązując zadanie interpolacji wielomianowej postawione przez Lagrange'a, które polega na znalezieniu dla danej funkcji $f$ wielomianu $L_n$ stopnia nie wyższego niż $n$, którego wartości w $n$+1 punktach $x_i$ są takie same, jak wartości interpolowanej funkcji, tzn.

$$L_n(x_i) = f(x_i) \text{ dla } i = 0, 1, 2, \ldots, n, \text{ gdzie } x_i \neq x_j \text{ dla } i \neq j. \qquad (3)$$

Dowodzi się twierdzenia, które brzmi:

*Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Dowód polega na wskazaniu postaci tego jedynego wielomianu interpolacyjnego oraz wykazaniu, że jest on jedyny. W tym celu konstruuje się funkcje pomocnicze:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \; i = 0,1,\ldots,n. \qquad (4)$$

W węzłach interpolacyjnych funkcje te przyjmują wartości z dwuelementowego zbioru {0, 1}:

$$l_i(x_j) = \delta_{i\,j} = \begin{cases} 1, & gdy\ i = j, \\ 0, & gdy\ i \neq j. \end{cases} \qquad (5)$$

$\delta_{i\,j}$ – jest symbolem Kronecker'a.

Przy wykorzystaniu tych funkcji pomocniczych wielomian interpolacyjny Lagrange'a może zostać opisany wzorem:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{6}$$

Dodatkowo wielomian (6) jest jedynym wielomianem, który spełnia założenia zadania interpolacyjnego.

**Wzór interpolacyjny Newtona:**

Wzór interpolacyjny Newtona wymaga określenia współczynników wielomianu interpolacyjnego w bazie wielomianów Newtona. Można tego dokonać dzięki zastosowaniu prostego algorytmu bazującego na ilorazach różnicowych.

Ilorazem różnicowym rzędu $k$ funkcji $f$ opartym na parami różnych węzłach $x_l$, $x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}$, w których znane są wartości funkcji $f$ nazywa się wyrażenie postaci:

$$[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}; f] = \sum_{i=l}^{l+k} \left( \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=l \\ j \neq i}}^{l+k} (x_i - x_j)} \right), \tag{7}$$

iloraz różnicowy rzędu zerowego oparty na węźle $x_l$ nazywamy :

$$[x_l; f] = f(x_l). \tag{8}$$

<u>Twierdzenie dotyczące możliwości rekurencyjnego określania ilorazów różnicowych:</u>

Dla dowolnego układu parami różnych punktów $x_l$, $x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}$, które należą do dziedziny funkcji $f$ można dowieść, że zachodzi następująca zależność rekurencyjna:

$$[x_l, x_{l+1}, \ldots x_{l+k}; f] = \frac{[x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots x_{l+k}; f] - [x_l, x_{l+1}, \ldots x_{l+k-1}; f]}{x_{l+k} - x_l}. \tag{9}$$

Definicja wielomianu interpolacyjnego Newtona:

Niech S oznacza siatkę określoną jak w (2). Wielomianem interpolacyjnym Newtona dla funkcji $f$ na siatce $S$ nazywamy wielomian:

$$\begin{aligned} N_n(x) = {} & f(x_0) + [x_0, x_1; f]\,(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2; f]\,(x - x_0)(x - x_1) \\ & + \ldots + [x_0, x_1, \ldots, x_n; f]\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{10}$$

Znajomość metody rekurencyjnego określania ilorazów różnicowych, które występują w interpolacyjnym wielomianie Newtona pozwala na konstrukcję prostego algorytmu, który pozwala na znalezienie współczynników tego wielomianu. Algorytm można określić w formie gotowej do przygotowania programu komputerowego, a także w formie tabelarycznej pozwalającej na przeprowadzenie serii obliczeń ręcznych.

Literatura:

Opracowano na podstawie pracy dostępnej w Internecie:

Andrzej Marciniak: Interpolacja (część 1), Elementy Analizy Numerycznej – wykłady online. 2010, pp. 21-30. Praca dostępna pod adresem: http://www.cs.put.poznan.pl/amarciniak/EMN-wyklady/EAN-4.pdf (ostatni dostęp: 2017-03-06).

Opracował dr Paweł Leszek Żak, (2017-03-07)