

**2R\_\_\_TTT88A Termod.TechCiepna WymCiepMasyPędu Teor- Zad-Lab**  
**(29zadań plus prosta krzyżówka techniczna)**

**Konspekt do ćwiczeń audytoryjnych i laboratoryjnych z przedmiotów**

„Termodynamika i technika ciepła”  
„Wymiana ciepła, masy i pędu w procesach  
metalurgicznych i odlewniczych”

**2009 - 2013**

**Adam Gradowski**

([agrad@agh.edu.pl](mailto:agrad@agh.edu.pl), [agraddom@interia.pl](mailto:agraddom@interia.pl))

**Kod = 882013E**

Termodynamika i technika ciepła oraz WymCiepłaMasyPędu #TTT88A

## Spis treści

|                                                                                                                                                                     |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1. Wprowadzenie do zagadnienia procesu przewodzenia ciepła                                                                                                          | 4    |
| 2. Model matematyczny ustalonego przepływu ciepła przez ściankę płaską .....                                                                                        | 6    |
| 3. Ustalony przepływ ciepła przez ściankę płaską - zadania (A1 – A7) .....                                                                                          | 7... |
| 4. Równania ustalonego przepływu ciepła przez ściankę cylindryczną .....                                                                                            | 15   |
| 5. Ustalony przepływ ciepła przez ściankę cylindryczną - zadania (B1 – B4) .....                                                                                    | 16   |
| 6. Nieustalone pole temperatury półprzestrzeni dla warunków brzegowych WB1r<br>(nagrzewanie lub stygnięcie) .....                                                   | 21   |
| 7.1. Pole temperatury półprzestrzeni przy ustalonych warunkach brzegowych<br>. 1. rodzaju – zadania (C1, C2) , dane do ćwiczenia <b>labor. nr 2</b> (pomiar a2).    | 23   |
| 7.2. Tabela funkcji błędów Gaussa .....                                                                                                                             | 26   |
| 8. Rozwiązywanie zagadnień cieplnych z zastosowaniem bilansu cieplnego<br>– zadania (D1 – D3) .....                                                                 | 27   |
| 8.1. Pojęcie bilansu cieplnego                                                                                                                                      | 27   |
| 8.2. Zastosowanie bilansu cieplnego (zadania)                                                                                                                       | 28   |
| 9. Nieustalone pole temperatury. Ciała klasyczne nagrzewane w warunkach<br>brzegowych 3. rodzaju. ....                                                              | 32   |
| 9.1. Wprowadzenie .....                                                                                                                                             | 32   |
| 9.2. <b>Wstęp teoretyczny do ćwic. laboratoryjnego nr 1</b> „Badanie współczynnika<br>wymiany ciepła i współczynnika przewodzenia ciepła powłoki izolacyjnej” ..... | 33   |
| 9.3. Obliczenie współczynnika wymiany ciepła ( zadanie 11 i analiza ) .....                                                                                         | 35   |
| 9.4. Przykład niepoprawnego oblicz. współczynnika przewodzenia ciepła powłoki                                                                                       | 36   |
| 9.5. Zadania .....                                                                                                                                                  | 37   |
| 9.6. Nomogramy pola temperatury nieograniczonego walca i płyty .....                                                                                                | 38   |
| 9.7. Przykłady obliczeń nagrzewania ciał klasycznych ( E1 - E2).                                                                                                    | 44   |
| 10. Wymiana ciepła w warunkach konwekcji swobodnej w nieograniczonej<br>przestrzeni - zadanie (F1) .....                                                            | 46   |
| 10.1. Wprowadzenie teoretyczne                                                                                                                                      | 46   |
| 10.2. Przykład obliczeniowy                                                                                                                                         | 47   |
| 11. Typowe przypadki wymiany ciepła przez promieniowanie .....                                                                                                      | 48   |
| 11.1. Wprowadzenie teoretyczne                                                                                                                                      |      |
| 11.2. Przykłady obliczeniowe (G1, G2)                                                                                                                               | 49   |
| 12. Wybrane zagadnienia przepływu u płynów w kanałach ( ćw. labor. nr 3 )                                                                                           | 52   |
| 12.1. Wprowadzenie teoretyczne                                                                                                                                      | 52   |
| 12.2. Rodzaje ciśnień opisujących proces przepływu w kanale .....                                                                                                   | 54   |
| 12.3. Natężenie przepływu gazu w rurociągu .....                                                                                                                    | 55   |
| 12.4. Przykłady obliczeniowe (H1, H2)                                                                                                                               | 56   |
| 13. Wykaz oznaczeń podstawowych parametrów ....                                                                                                                     | 58   |
| 14. Wybrane parametry termofizyczne metali, stopów i form piaskowych .....                                                                                          | 59   |
| 15. Zadanie kontrolne dla studentów niestacjonarnych (2011/ 2012) .....                                                                                             | 61   |
| 16. Pytania do zaliczenia ćwiczeń laboratoryjnych ...                                                                                                               | 62   |
| 17. Część II. Wybrane zagadnienia z przemian gazowych .....                                                                                                         | 64   |
| 17. 1. Podstawowe parametry przemian termodynamicznych .....                                                                                                        | 64   |
| 17. 2. Parametry przemian termodynamicznych .....                                                                                                                   | 76   |
| 17. 3. Definicje innych parametrów                                                                                                                                  |      |
| 17. 4. Przykłady obliczeniowe parametrów przemian gazowych (6 zadań)                                                                                                | 65   |
| 18. Badanie parametrów przemiany izotermicznej i adiabatycznej (ćwiczenie laboratoryjne)                                                                            | 71   |

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 18. 1. Wprowadzenie                                                         | 71  |
| 18. 2. Pierwsza zasada termodynamiki .....                                  | 73  |
| 18. 3. Matematyczno-fizyczny opis przemiany adiabatycznej .....             | 74  |
| 18. 4. Metody oznaczania wykładnika adiabaty ..                             | 77  |
| 18. 5. Termodynamiczne etapy metody doświadczalnej                          | 82  |
| 18. 6. Przykłady obliczeniowe                                               | 82  |
| 18. 7. Literatura                                                           | 83  |
| 18. 8. Arkusz obliczeniowy do ćwiczeń laboratoryjnych                       | 84  |
| 19. Część III. Wymiana ciepła przy wymuszonym przepływie w kanałach .....   | 85  |
| 19. 1. Wprowadzenie                                                         | 85  |
| 19. 2. Przykład obliczeniowy                                                | 86  |
| 19. 3. Zestawienie równań opisujących liczbę Nusselta                       | 88  |
| 20. Właściwości fizyczne płynów .....                                       | 89  |
| 21. Niektóre metody szybkiego mnożenia                                      | 90  |
| 22. Literatura .....                                                        | 91  |
| 23. Krótkie streszczenie wybranych zagadnień (ściąga)                       | 92  |
| 23. 1. Wybrane pojęcia z zagadnień wymiany ciepła                           | 92  |
| 23. 2. Definicje wybranych pojęć z zagadnień przepływu płynu (wymiany masy) | 95  |
| 23. 3. Wybrane zagadnienia przemian gazowych                                | 96  |
| 24. Tematy ćwiczeń laboratoryjnych                                          | 98  |
| 25. Prosta krzyżówka inżynierska                                            | 99  |
| 26. Uwagi końcowe                                                           | 100 |

**DLA STUDENTÓW ROKU II i III**

( 3.11.2009 do 19. 03. 2013 )

# 1. Wprowadzenie do zagadnienia procesu przewodzenia ciepła

## Podstawowe pojęcia

Warunkiem zrozumienia podstawowych zagadnień wymiany ciepła na drodze przewodzenia jest dokładna znajomość podstawowych pojęć niezbędnych do matematyczno-fizycznego opisu przebiegu tego procesu. Ograniczymy się do pojęć:

- układ podlegający badaniu,
- ustalone (stacjonarne) i niestacjonarne (nieustalone) pole temperatury,
- liniowe, płaskie i przestrzenne pole temperatury,
- gradient temperatury,
- pojęcie i równanie opisujące gęstość strumienia cieplnego,
- podstawowe i „rozszerzone” parametry termofizyczne badanych ciał (5 parametrów),
- opory cieplne przewodzenia i wymiany ciepła,
- warunki jednoznaczności jako podstawa strategii rozwiązywania ogólnego równania różniczkowego przewodzenia ciepła (Fouriera).

Układem nazywamy wydzielony obszar przestrzenny w którym zachodzą wszystkie procesy podlegające badaniom, analizie i ujęciu w postaci bilansu ciepła, masy i energii. Nieustalone pole temperatury ( nie temperatur ! ) to zależność funkcyjna w której zmienną zależną jest wartość temperatury a zmiennymi niezależnymi współrzędne położenia i czas. Jeżeli pole jest stacjonarne (ustalone) to zależy wyłącznie od współrzędnych, czyli nie zależy od czasu. Można też powiedzieć, że stacjonarny oznacza: niezmienny w czasie.

Zależnie od liczby współrzędnych pole temperatury może być:

- liniowe,  $T = f(x, \tau)$  lub  $T = f(x)$ ,
- płaskie,  $T = f(x, y, \tau)$  lub  $T = f(x, y)$ ,
- przestrzenne,  $T = f(x, y, z, \tau)$  lub  $T = f(x, y, z)$ .

Przypadki pola płaskiego i przestrzennego są bardzo trudne a czasem niemożliwe do matematycznego opisu, wymagającego całkowania równania różniczkowego przewodzenia ciepła. Dlatego uproszczone modele matematyczne dotyczą bardzo często przypadku liniowego pola temperatury.

Gęstość strumienia cieplnego „q” jest to ilość ciepła wymieniana przez jednostkową powierzchnię ciała odniesiona do jednostki czasu, czyli:

$$q = \frac{dQ}{F d\tau} \quad \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (1)$$

gdzie: F – pole powierzchni  $[m^2]$  przez którą przepływa elementarne ciepło dQ,  
dQ - elementarne ciepło  $[J]$ ,  
 $\tau$  - czas  $[s]$ .

Pojęcie gradientu temperatury definiowane jest ogólnie za pomocą pochodnej :

$$gradT = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2a)$$

a dla ustalonego, liniowego pola temperatury  $\{ T = f(x) \}$  w postaci:

$$gradT = \frac{dT}{dx} \quad \left[ \frac{K}{m} \right] \quad (2b)$$

Podstawowymi parametrami ( współczynnikami) termofizycznymi (materiału formy, odlewu, materiałów izolacyjnych itp.) decydującymi o przebiegu procesu przewodzenia ciepła są:

a)  $\lambda$  - współczynnik przewodzenia ciepła  $\left[ \frac{W}{m \cdot K} \right]$ , („lambda”),

b)  $c$  - ciepło właściwe  $\left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right]$ ,

c)  $\rho$  - gęstość masy  $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ , ( litery „ro” nie należy mylić z „podobną” literą ”p”).

Dla ułatwienia matematycznego ujęcia przebiegu procesów cieplnych wprowadzono ponadto tzw. „rozszerzone” parametry termofizyczne ( materiału formy, odlewu itp.), definiowane w oparciu o parametry podstawowe.

Należą do nich: współczynnik wyrównywania temperatury „a” (inna nazwa to współczynnik przewodzenia temperatury) i współczynnik akumulacji ciepła „b”.

Współczynnik wyrównywania temperatury definiowany jest wzorem:

$$a = \frac{\lambda}{c \rho} \dots\dots\dots \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

Natomiast współczynnik akumulacji ciepła określony jest zależnością:

$$b = \sqrt{\lambda \cdot c \cdot \rho} \quad \left[ \frac{Ws^{1/2}}{m^2 K} \right]$$

Nazwa tego współczynnika wynika z faktu, że w pewnych zagadnieniach przewodzenia ilość akumulowanego w ciele ciepła jest proporcjonalna do wartości współczynnika akumulacji ciepła.

Niezbędnym warunkiem rozwiązania podstawowego równania różniczkowego przewodzenia ciepła (Fouriera) odzwierciedlającego konkretny przypadek wymiany ciepła jest sformułowanie tzw. warunków jednoznaczności, czyli dodatkowych warunków ściśle określających rozpatrywane zagadnienie. Pozwala to na wydzielenie z nieskończonej liczby zjawisk przewodzenia ciepła - spełniających równanie różniczkowe Fouriera - ściśle określonego procesu, będącego przedmiotem naszych badań i uzyskanie jego matematycznego opisu, najczęściej w postaci równania pola temperatury.

W skład warunków jednoznaczności wchodzi:

1. warunki geometryczne, określające kształt badanego układu lub części w której zachodzi badany proces cieplny,
2. warunki fizyczne, opisujące właściwości ( parametry) termofizyczne wszystkich podobszarów układu ( np. metalu odlewu, materiału formy, materiału izolacyjnego),
3. warunki początkowe, określające pole temperatury układu w momencie przyjętym jako początkowy ( $\tau = 0$  ), przy czym występują one tylko w procesach nieustalonego przepływu ciepła, w których występuje nieustalone pole temperatury.
4. warunki brzegowe, które mogą być zadawane 4. sposobami.

Warunki brzegowe 1. i 3. rodzaju (najczęściej stosowane i oznaczane symbolami WB1r i WB3r) zostaną opisane w punkcie 3.

## 2. Model matematyczny ustalonego przepływu ciepła przez ściankę płaską

Równanie różniczkowe opisujące ustalone, liniowe temperatury (przy niezmiennych parametrach termofizycznych ciała) ma postać:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

Z ogólnej definicji gradientu wynika więc dla ścianki płaskiej :

$$\text{grad}T = \frac{dT}{dx} = \frac{T_{2\text{pow}} - T_{1\text{pow}}}{g} \quad (2)$$

gdzie:

$T_{1\text{pow}}, T_{2\text{pow}}$  - temperatury obu powierzchni ścianki płaskiej,  
 $g$  – grubość ścianki ( oznaczana często przez „ d ” ).

Zgodnie z prawem Fouriera

$q = -\lambda \text{ grad}T$  otrzymujemy dla ścianki płaskiej

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_{1\text{pow}} - T_{2\text{pow}}}{d} \quad (3)$$

.lub

$$q = \frac{T_{1\text{pow}} - T_{2\text{pow}}}{S_\lambda} \quad (4)$$

Postać równania (4) uzyskano przy założeniu znajomości warunków brzegowych 1. rodzaju (WB1r). Parametr cieplny występujący w mianowniku równania (4) nazywany jest oporem przewodzenia ciepła:

$$S_\lambda = \frac{d}{\lambda} \left[ \frac{m^2 K}{W} \right] \quad (5)$$

W odniesieniu do warunków brzegowych 3. rodzaju (WB3r) wprowadzono tzw. opór wymiany ciepła, równy:

$$S_\alpha = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{m^2 K}{W} \right] \quad (6)$$

W przypadku ścianki wielowarstwowej (WB1r) w mianowniku równania (4) wystąpi suma wszystkich oporów cieplnych  $S_\lambda$ .

W przypadku przepływu ciepła - rozpatrywanego z wykorzystaniem WB3r – w mianowniku równania (4) wystąpi suma wszystkich oporów cieplnych (  $S_\alpha$  ,  $S_\lambda$  ).

### 3. Ustalony przepływ ciepła przez ściankę płaską - zadania

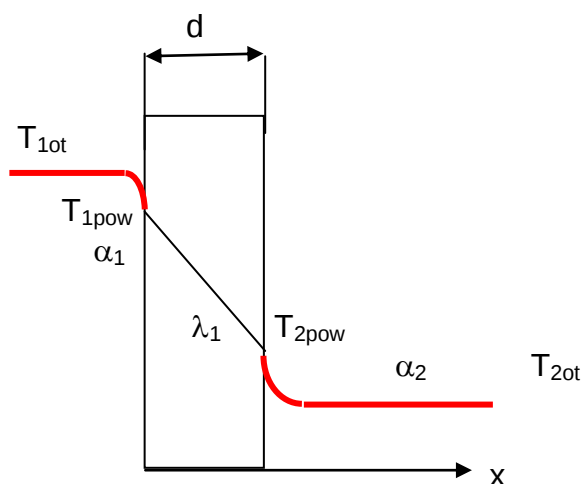
#### ZADANIE A1 (TT45)

Piec laboratoryjny zbudowany jest ze ścianek stalowych o grubości  $d = 3 \text{ mm}$  i współczynnika przewodzenia ciepła równym  $\lambda = 44 \text{ W/(m K)}$ . Wewnątrz pieca panuje temperatura  $T_{1\text{ot}} = 90^\circ \text{C}$  a w pomieszczeniu laboratoryjnym  $T_{2\text{ot}} = 20^\circ \text{C}$ . Współczynniki wymiany ciepła na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej wynoszą:

$\alpha_1 = 25 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$  i  $\alpha_2 = 8 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ . Należy obliczyć:

- opory cieplne w układzie,
- gęstość strumienia ciepłego przepływającego w układzie,
- temperatury obu powierzchni ścianek,
- spadek temperatury i gradient temperatury w ściance,
- gęstość strumienia ciepłego w oparciu o prawo Fouriera dla ścianki,
- pole temperatury w ściance.
- wartość temperatury w środku ścianki,

Schemat układu



Rys.1. (Do zad. A1) Ustalony przepływ ciepła przez ściankę płaską jednowarstwową o grubościach  $d$  i współczynnika przewodzenia  $\lambda$ .

. ==

Obliczamy opory cieplne:

$$R_\lambda = d / \lambda = 0,003 / 44 = 0,0000682 \text{ m}^2 \text{ K/ W}$$

$$R_{\alpha_1} = 1 / \alpha_1 = 1 / 25 = 0,04 \text{ m}^2 \text{ K/ W}$$

$$R_{\alpha_2} = 1 / \alpha_2 = 1 / 8 = 0,125 \text{ m}^2 \text{ K/ W} .$$

Gęstość strumienia ciepłego dla układu (3 opory cieplne):

$$q = \frac{T_{1\text{ot}} - T_{2\text{ot}}}{\Sigma R} = \frac{90 - 20}{0,04 + 0,0000682 + 0,125} = 485 \text{ .....W/m}^2$$

Temperatury obu powierzchni ścianki:

$$T_{1\text{pow}} = T_{1\text{ot}} - q / \alpha_1 = 90 - 485 / 25 = 80,614 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_{2\text{pow}} = T_{2\text{ot}} + q / \alpha_2 = 20 + 485 / 8 = 80,581 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Spadek temperatury w ściance:

$$\Delta T = T_{2\text{pow}} - T_{1\text{pow}} = 80,581 - 80,614 = -0,033 \text{ K}$$

Gradient temperatury:

$$\text{grad}T = \Delta T / d = -0,033 / 0,003 = -11 \text{ K/m}$$

Gęstość strumienia cieplnego wg prawa Fouriera dla warstwy metalowej :

$$q = -\lambda \text{ grad}T = -44 \cdot (-11) = 484 \text{ W/m}^2.$$

Pole temperatury w ściance :

$$T = T_{1\text{pow}} + \frac{x}{d}(T_{2\text{pow}} - T_{1\text{pow}}) = T_{1\text{pow}} + x \cdot \text{grad}T$$

$$T = 80,614 - 11 \cdot x$$

Wartość temperatury w środku ścianki (  $x = 0,0015$  ) :

$$T = 80,614 - 11 \cdot 0,0015 = 80,597 \text{ } ^\circ\text{C}$$

## ZADANIE A2 (TT45)

(korekta – szukane  $\alpha_1$ , tabela Alfa)

Ścianka grzejnika żeliwnego posiada na powierzchni zewnętrznej warstwę lakieru, czyli jest 2. warstwowa w sensie cieplnym. Zmierzona temperatura w warstwie metalowej wynosi  $T_{\text{mśr}} = 70 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Grubości metalu i lakieru wynoszą odpowiednio:  $d_1 = 3 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 0,1 \text{ mm}$ . Współczynniki przewodzenia ciepła wynoszą  $\lambda_1 = 50 \text{ W/(m K)}$  dla żeliwa oraz  $\lambda_2 = 1 \text{ W/(m K)}$  dla warstwy lakieru.

Oszacować współczynnik wymiany ciepła na wewnętrznej powierzchni grzejnika, znając temperaturę  $T_{1\text{ot}} = 80 \text{ } ^\circ\text{C}$  i  $T_{2\text{ot}} = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Skorzystać z tabeli opisującej przybliżony efektywny współczynnik wymiany ciepła – dla konwekcji naturalnej i promieniowania - w funkcji temperatury zewnętrznej powierzchni grzejnika.

Tabela 1. Przybliżone efektywne współczynniki wymiany ciepła (dla epsilon = 0,8)

| $T_{\text{pow}}$     | 20°C | 25  | 30   | 35  | 40   | 45  | 50   | 60   | 70   | 80   | 90    |
|----------------------|------|-----|------|-----|------|-----|------|------|------|------|-------|
| $\alpha_{\text{ef}}$ | 6    | 7,4 | 8,25 | 8,9 | 9,35 | 9,8 | 10,2 | 10,9 | 11,5 | 12,1 | 12,65 |

W zakresie temperatur od 20 do 100  $^\circ\text{C}$  efektywny współczynnik wymiany ciepła (przy emisyjności powierzchni  $\varepsilon = 0,8$ ) można opisać równaniem:

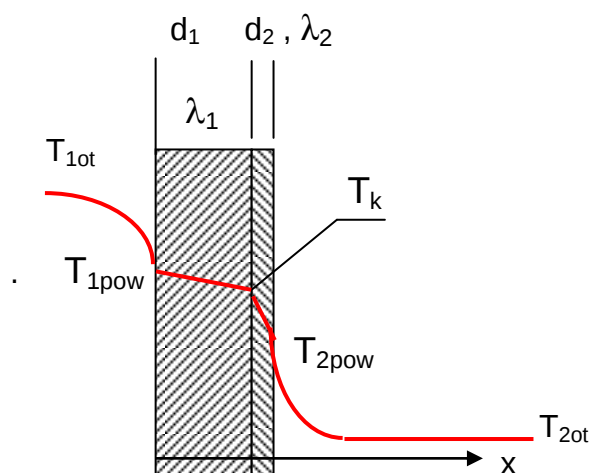
$$\alpha_{\text{ef}} = 33,64 - 47,4 \cdot T_{\text{pow}}^{-0,18}$$

Rozwiązanie.

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

Założymy wstępnie wartość temperatury zewnętrznej powierzchni grzejnika  $T_{2pow} = 65^{\circ}\text{C}$ , co pozwala przyjąć dla tej powierzchni współczynnik wymiany  $\alpha_2$  równy  $11,2 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ .

Schemat układu



Rys. do zad. A2. Schemat pola temperatury dla warunków brzegowych WB3r. Ścianka dwuwarstwowa o grubościach  $d_1$  i  $d_2$  i współczynnikach przewodzenia  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Strumień cieplny w układzie:

$$q = \alpha_2 (T_{2pow} - T_{2ot}) = (T_{1ot} - T_{2ot}) / R_{ef} = 11,2 (65 - 20) = 504 \text{ W/m}^2.$$

Sumaryczny opór cieplny

$$R_{ef} = (T_{1ot} - T_{2ot}) / q = (80 - 20) / 504 = 0,119 \text{ m}^2 \text{ K/W}.$$

Sumaryczny opór cieplny wyrazić można :

$$R_{ef} = 1/\alpha_1 + d_1/\lambda_1 + d_2/\lambda_2 + 1/\alpha_2$$

Stąd

$$\alpha_1 = 1 / (R_{ef} - d_1/\lambda_1 - d_2/\lambda_2 - 1/\alpha_2) = 1 / (0,119 - 0,003/50 - 0,0001/1 - 1/11,2)$$

$$\alpha_1 = 33,8 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}.$$

Należy jeszcze sprawdzić poprawność temperatury  $T_{2pow}$  przyjmując temperaturę kontaktu metalu i lakieru równą  $T_k = T_{msr} = 70^{\circ}\text{C}$ .

$$\Delta T_2 = T_k - T_{2pow} = q d_2 / \lambda_2 = 504 \cdot 0,0001 / 1 = 0,0504 \text{ K}$$

Stąd mamy

$$T_{2pow} = T_k - \Delta T_2 = 70 - 0,0504 = 69,95^{\circ}\text{C}.$$

Dla tej temperatury dokładniejsza wartość  $\alpha_{ef}$  wynosi  $11,5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ .

Powtarzając obliczenia uzyskamy

$$q^* = 517,5 \text{ W/m}^2 \text{ oraz } \alpha_1 = 34,7 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}.$$

**ZADANIE A3**

Ścianka pieca posiada warstwę ceramiczną (cegła szamotowa) i zewnętrzny pancerz stalowy. Grubość warstwy ceramicznej ( $d$ ) wynosi 100 mm a jej współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda_c = 1,2 \text{ W/(m K)}$ . W obszarze warstwy ceramicznej zmierzono temperatury na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej, równe odpowiednio:

$$T_{zew} = 1180 \text{ }^\circ\text{C} \text{ i } T_{wew} = 1200 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Obliczyć:

- gradient temperatury,
- gęstość strumienia ciepłego,
- pole temperatury ścianki,
- wartość temperatury  $T_{\text{śr}}$  w połowie grubości ścianki.

Rozwiązanie

Zakładamy kierunek osi  $x$  w kierunku od środka pieca do otoczenia, co określa sposób obliczenia (znak) gradientu i kierunek wektora strumienia ciepłego.

$$\text{grad}T = \Delta T / d = (T_{zew} - T_{wew}) / d = (1180 - 1200) / 0,1 = -200 \text{ K/m}$$

$$q = -\lambda_c \text{ grad} T = -1,2 \cdot (-200) = 240 \text{ W/m}^2.$$

$$T = T(x=0) + x \cdot \text{grad} T = T_{wew} - 200 \cdot x = 1200 - 200x, \quad [^\circ\text{C}]$$

$$\text{Dla punktu w połowie grubości ścianki współrzędna } x = d/2 = 0,1/2 = 0,05 \text{ m}$$

Czyli

$$T_{\text{śr}} = T(x = d/2) = 1200 - 200 \cdot 0,05 = 1190 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**ZADANIE A4**

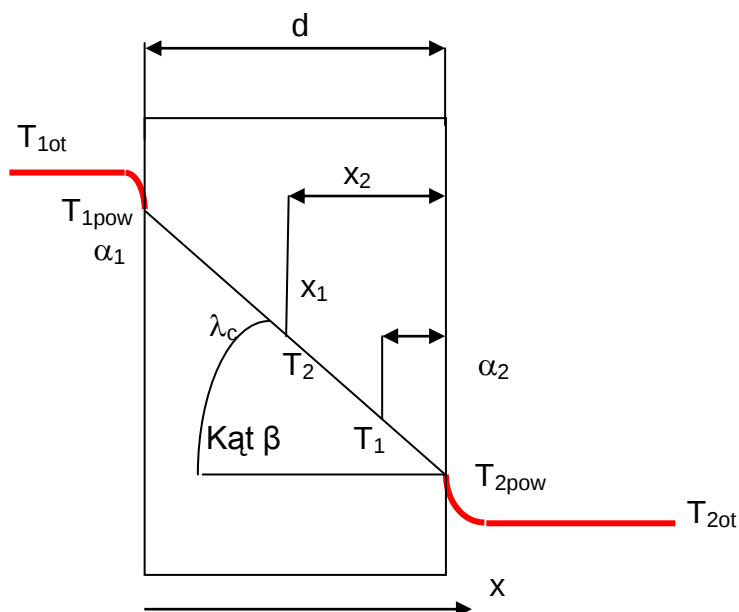
[Poprawione w styczniu 2011 !](#)

Za pomocą dwu termoelementów zmierzono temperatury w dwu punktach cegły pieca grzewczego. Wartości temperatur w dwu odległościach od zewnętrznej powierzchni pieca wynosiły :

- $T_1 = 58 \text{ }^\circ\text{C}$  dla odległości  $x_1 = 2 \text{ mm}$ ,
- $T_2 = 60 \text{ }^\circ\text{C}$  dla odległości  $x_2 = 6 \text{ mm}$ .

Grubość warstwy cegły wynosi 50 mm, przy wartości współczynnika przewodzenia ciepła równej  $\lambda_c = 0,8 \text{ W/(m K)}$ . Zakładając temperaturę pomieszczenia (otoczenia) równą  $T_{\text{ot}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Obliczyć:

- gradient temperatury,
- gęstość strumienia ciepłego,
- temperatury na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni ścianki,
- całkowite straty ciepła w ciągu 1 godziny, jeżeli powierzchnia wymiany ciepła wynosi  $F_{\text{ot}} = 3 \text{ m}^2$ ,
- efektywny współczynnik wymiany ciepła na zewnętrznej powierzchni pieca,
- współczynnik wymiany ciepła na drodze konwekcji,
- przy jakiej grubości cegły straty ciepłe zmniejszą się o 20 %.



Rys. do zad. A4. Pole temperatury ścianki pieca ( $T_{2\text{pow}}$  – pow. zewnętrzna).  
Spadek temperatury  $T_1 - T_2 = 58 - 60 = -2 \text{ K}$

$$\text{grad}T = \Delta T / (d - x_1 + d + x_2) = (T_1 - T_2) / (0,006 - 0,002) = -2 / 0,004$$

$$\text{grad}T = -500 \text{ K/m}$$

Szukane temperatury:

$$\text{tg } \beta = \frac{T_1 - T_{2\text{pow}}}{x_1} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = -\text{grad } T = 500 \text{ K/m}$$

$$T_{2\text{pow}} = T_1 - 500 \cdot x_1 = 58 - 500 \cdot 0,002 = 57 \text{ }^\circ\text{C}$$

Analogicznie :

$$\frac{T_{1\text{pow}} - T_{2\text{pow}}}{d} = -\text{grad } T, \text{ skąd } T_{1\text{pow}} = 500 \cdot 0,05 + T_{2\text{pow}} = 25 + 57 = 82 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\text{Strumień ciepła } q = -\lambda_c \text{ grad } T = -0,8 \cdot (-500) = 400 \text{ W/m}^2$$

Straty ciepła do otoczenia w ciągu 1 godz.:

$$Q_{\text{str}} = q \cdot F_{\text{ot}} \cdot \Delta\tau = 400 \cdot 3 \cdot 3600 = 4\,320 \text{ kJ}$$

Współczynnik wymiany ciepła (efektywny)

Zgodnie z prawem Newtona  $q = \alpha (T_{\text{pow2}} - T_{\text{ot}})$  , czyli :

$$\alpha = \frac{q}{T_{2\text{pow}} - T_{\text{ot}}} = 400 / (57 - 20) = 10,8 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}.$$

Obliczony współczynnik  $\alpha$  jest współczynnikiem efektywnym ujmującym straty ciepła na drodze konwekcji i promieniowania, czyli  $\alpha_{\text{ef}} = \alpha_k + \alpha_{\text{pr}}$  .

Składową  $\alpha_{pr}$  odpowiadającą promieniowaniu podano w poniższej tabeli (przykłady wymiany ciepła przez promieniowanie będą podane w końcowej części opracowania).

Przybliżone współczynniki wymiany ciepła przez promieniowanie  $\alpha_{pr}$  w funkcji temperatury powierzchni ( przy  $T_{ot} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  i dla współczynnika emisyjności  $\varepsilon = 0,8$  )

|                                               |      |     |      |      |     |
|-----------------------------------------------|------|-----|------|------|-----|
| $T_{pow}$                                     | 25   | 30  | 40   | 50   | 60  |
| $\alpha_{pr}, \text{W}/(\text{m}^2 \text{K})$ | 4,68 | 4,8 | 5,05 | 5,31 | 5,6 |

Przyjmując, że dla temperatury  $T_{pow} = 57\text{ }^{\circ}\text{C}$  wartość  $\alpha_{pr} = 5,5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$  możemy oszacować wartość współczynnika konwekcji :

$$\alpha_k = \alpha - \alpha_{pr} = 10,8 - 5,5 = 5,3 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}).$$

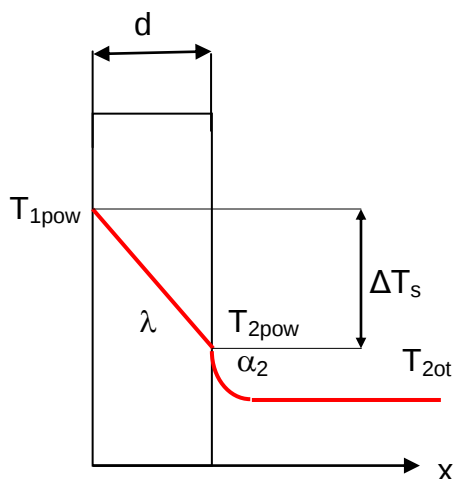
### ZADANIE A5 ( na kolokwium 13. 01. 2010 )

Ścianka płaska o grubości  $d = 100 \text{ mm}$  i współczynniku przewodzenia ciepła równym  $\lambda = 0,5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$  posiada na powierzchni chłodzonej (zewnątrznej) temperaturę  $T_{2pow} = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$ , przy temperaturze otoczenia  $T_{ot2} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Wartość współczynnika wymiany ciepła  $\alpha_2 = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$ .

Należy obliczyć:

- gęstość strumienia ciepłego wymienianego w układzie,
- spadek temperatury  $\Delta T_s$  i temperaturę  $T_{1pow}$ .

Schemat układu



Rys.1. (do zad. A5). Ścianka płaska o grubości  $d$  i współczynniku przewodzenia  $\lambda$ .

- strumień cieplny wg prawa Newtona:

$$q = \alpha_2 (T_{2pow} - T_{2ot}) = 5 (60 - 20) = 200 \text{ W}/\text{m}^2$$

- opór cieplny ścianki :

$$R = d/\lambda = 0,1/0,5 = 0,2 \text{ m}^2 \text{K}/\text{W}$$

3.  $\text{grad } T = q / \lambda = 200 / 0,5 = 400 \text{ K/m}$
4. spadek temperatury:  
 $\Delta T_s = d \cdot \text{grad } T = 0,1 \cdot 400 = 40 \text{ K}$ ,    lub  
 $\Delta T_s = q \cdot R = 200 \cdot 0,2 = 40 \text{ K}$
5. temperatura  $T_{1\text{pow}}$   
 $T_{1\text{pow}} = T_{2\text{pow}} + \Delta T_s = 60 + 40 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ .  
 - - -

[ Zadania na kolokwium dla grupy 3( Rok2) - 12.2009 \* ]

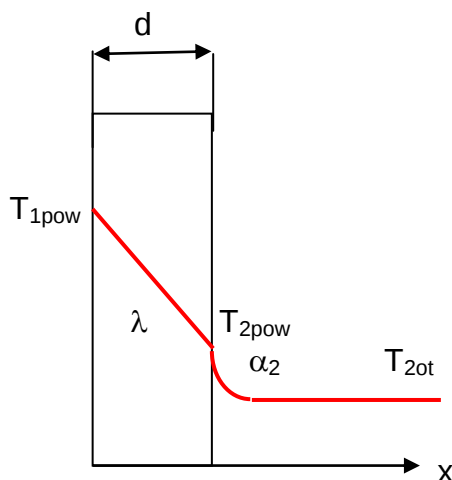
### ZADANIE A6 (W36 popr.)

Ścianka płaska o grubości  $d = 10 \text{ mm}$  i współczynniku przewodzenia ciepła równym  $\lambda = 1 \text{ W/(m K)}$  posiada na powierzchniach temperatury:  $T_{1\text{pow}} = 36 \text{ }^\circ\text{C}$  i  $T_{2\text{pow}} = 37 \text{ }^\circ\text{C}$ . Temperatura otoczenia po prawej stronie ścianki  $T_{\text{ot}2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Należy obliczyć:

- a) gęstość strumienia ciepłego przewodzonego przez ściankę,
- b) wartość współczynnika wymiany ciepła  $\alpha_2$ .

Schemat układu



Rys.1.(do zad. A6) . Ścianka płaska grubości  $d$  i współczynnika przewodzenia  $\lambda$  .

a) gradient temperatury i strumień :

$$\text{grad } T = \Delta T / d = (T_{2\text{pow}} - T_{1\text{pow}}) / d = (36 - 37) / 0,01 = -100 \text{ K/m}$$

$$q = -\lambda \text{ grad } T = -1 \cdot (-100) = 100 \text{ W/m}^2.$$

b) współczynnik wymiany ciepła :

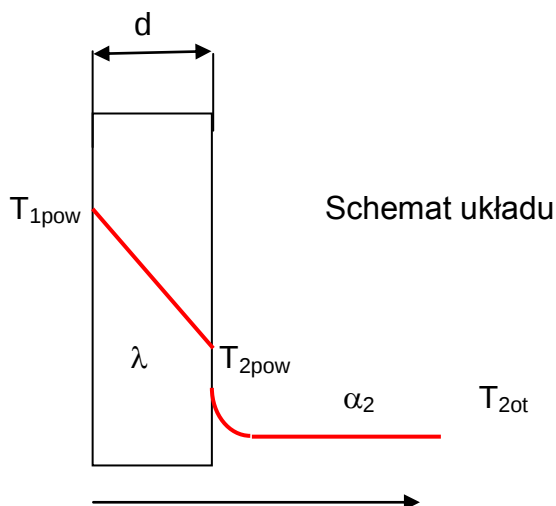
Zgodnie z prawem Newtona  $q = \alpha_2 (T_{\text{pow}2} - T_{2\text{ot}})$  , czyli :

$$\alpha_2 = \frac{q}{T_{\text{pow}2} - T_{2\text{ot}}} = 100 / (36 - 20) = 6,25 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}.$$

**ZADANIE A7**

Ceramiczna ścianka płaska o grubości  $d = 100 \text{ mm}$  i współczynniku przewodzenia ciepła równym  $\lambda = 0.9 \text{ W/(m K)}$  posiada na powierzchniach temperatury:  $T_{1\text{pow}} = 75^\circ \text{C}$  i  $T_{2\text{pow}} = 55^\circ \text{C}$ . Temperatura otoczenia po stronie zgodnej z powierzchnią „2” (na rys. po stronie „prawej”) wynosi  $T_{\text{ot}2} = 20^\circ \text{C}$ . Należy obliczyć:

- gęstość strumienia ciepłego przewodzonego przez ściankę,
- wartość współczynnika wymiany ciepła  $\alpha_2$ .



Rys.1.(do zad. A7). Ścianka płaska grubości  $d$  i współczynnika przewodzenia  $\lambda$ .

A. gradient temperatury i strumień :

$$\text{grad}T = \Delta T / d = (T_{2\text{pow}} - T_{1\text{pow}}) / d = (55 - 75) / 0,1 = -200 \text{ K/m}$$

$$q = -\lambda \cdot \text{grad} T = -0,9 \cdot (-200) = 180 \text{ W/m}^2.$$

B. współczynnik wymiany ciepła :

Zgodnie z prawem Newtona  $q = \alpha_2 (T_{2\text{pow}} - T_{2\text{ot}})$ , czyli :

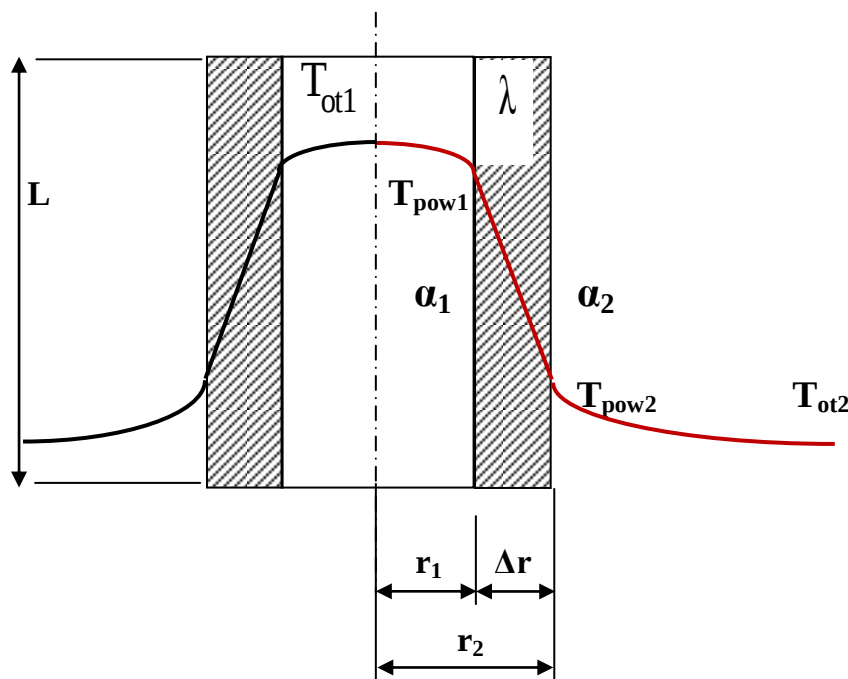
$$\alpha_2 = \frac{q}{T_{2\text{pow}} - T_{2\text{ot}}} = 180 / (55 - 20) = 5,14 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}.$$

#### 4. Równania ustalonego przepływu ciepła przez ściankę cylindryczną

(\*\* Termodynamika, Rok 2, grupa 3, wg pliku :Zad5678910-Cyl-Polp-Bila-gr3)

Rozpatrujemy proces ustalonego przepływu ciepła dla różnych warunków brzegowych ( 1. rodzaju i 3. rodzaju )

##### Schemat cylindrycznego układu



##### Założenia modelowe i oznaczenia

- ścianka ma kształt cylindryczny a przepływ ciepła występuje tylko w kierunku promienistym,
- na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej wymiana ciepła zachodzi przy warunkach brzegowych 1 lub 3 rodzaju ( 4 różne przypadki).
- w przypadku WB1r niezbędne jest zadanie temperatur  $T_{pow1}$  i  $T_{pow2}$ ,
- w przypadku WB3r niezbędne jest określenie współczynników wymiany ciepła  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  oraz temperatur  $T_{ot1}$  i  $T_{ot2}$ ,
- $r_1$  i  $r_2$  to: promień wewnętrzny i zewnętrzny,
- $\Delta r$  - grubość ścianki jednowarstwowej.

Należy zaznaczyć, że ogólne rozwiązanie równania różniczkowego dla kształtu cylindrycznego stwarza możliwość jego zastosowania dla ścianek wielowarstwowych oraz dla różnych, mieszanych warunków brzegowych.

Przez pojęcie **liniowej gęstości strumienia cieplnego**  $q_L$  należy rozumieć ilość przepływającego ciepła odniesionego do jednostki długości ścianki dla jednostkowego interwału czasowego, zgodnie z definicją:

$$q_L = \frac{Q}{L\Delta\tau} \quad [\text{W/m}]$$

$Q$  - całkowita ilość przepływającego ciepła [J].

Najogólniejsze równanie opisujące gęstość strumienia ciepłego dla ścianki cylindrycznej, wielowarstwowej - przy warunkach brzegowych 3 rodzaju (WB3r) dotyczących powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej - może być zapisane:

$$q_L = \frac{2\pi (T_{ot1} - T_{ot2})}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} + \frac{1}{\alpha_2 r_{n+1}}} \quad [\text{W/m}]$$

W przypadku ścianki 1. warstwowej (rys. 1) należy do ww. wzoru podstawić  $n = 1$ .

Dla ścianki wielowarstwowej i warunków WB1 rodzaju na obu powierzchniach otrzymamy równanie:

$$q_L = \frac{2\pi (T_{pow1} - T_{pow2})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}} \quad [\text{W/m}]$$

Przykład mieszanych warunków brzegowych przedstawić można za pomocą przykładu obliczeniowego.

## 5. Ustalony przepływ ciepła przez ściankę cylindryczną - zadania

### **ZADANIE B1 (5)**

Znana jest temperatura na wewnętrznej powierzchni jednowarstwowej ścianki cylindrycznej żeliwnej wynosząca  $90^\circ\text{C}$  (WB1r). Średnica wewnętrzna ścianki wynosi  $d_1 = 200$  mm przy grubości ( $\Delta r$ ) równej 20 mm. Wymiana ciepła na powierzchni zewnętrznej przebiega zgodnie z warunkami brzegowymi 3. rodzaju (WB3r), przy współczynniku  $\alpha_2 = 5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$  i temperaturze otoczenia równej  $30^\circ\text{C}$ . Materiałem ścianki jest żeliwo. Obliczyć liniową gęstość strumienia ciepłego oraz całkowitą ilość wymienianego ciepła dla ścianki o długości 1 m w przedziale czasu  $\Delta\tau$  równym 5 s.

Obliczyć temperaturę powierzchni zewnętrznej  $T_{pow2}$ . Porównać obliczone ciepło całkowite z ilością ciepła dla geometrycznie „podobnej” ścianki płaskiej o takiej samej grubości. Z tablic odczytujemy dla żeliwa współczynnik przewodzenia  $\lambda = 50 \text{ W/(m K)}$ .

Równanie wyrażające przedstawiony wariant mieszanych warunków brzegowych ma postać:

$$q_L = \frac{2\pi (T_{pow1} - T_{ot2})}{\frac{1}{\lambda \ln \frac{r_1 + \Delta r}{r_1}} + \frac{1}{\alpha_2 (r_1 + \Delta r)}} \quad [\text{W/m}]$$

$$r_1 = d_1 / 2 = 0,1 \text{ m} , \quad \Delta r = 0,02 \text{ m}$$

$$q_L = \frac{2 \pi (90-30)}{\frac{1}{50} \ln \frac{0,1+0,02}{0,1} + \frac{1}{5(0,1+0,02)}} \quad [\text{W/ m}]$$

$$q_L = 225 \text{ W/ m.}$$

Całkowita ilość ciepła :

$$Q = q_L \cdot L = 225 \cdot 1 \cdot 5 = 1125 \text{ J.}$$

Spadek temperatury  $\Delta T_{ot2}$  ( $T_{pow2} - T_{ot2}$ ) na zewnętrznej powierzchni ścianki wynika z prawa Newtona

$$Q_{ot} = Q = \alpha_2 (T_{pow2} - T_{ot2}) F_2 \Delta \tau,$$

$$F_2 = 6,28 \cdot 0,12 \cdot 1 = 0,754 \text{ m}^2, \text{ czyli}$$

$$\Delta T_{ot2} = Q_{ot} / (\alpha_2 F_2 \Delta \tau) = 1125 / (5 \cdot 0,754 \cdot 5) = 59,7 \text{ K.}$$

Temperatura  $T_{pow2}$

$$T_{pow2} = T_{ot2} + \Delta T_{ot2} = 30 + 59,7 = 89,7 \text{ }^\circ\text{C.}$$

Geometrycznie podobna ścianka płaska posiada powierzchnię wymiany ciepła równą powierzchni odpowiadającej promieniowi opisującemu połowę grubości ścianki cylindrycznej. Średnia powierzchnia dla ścianki płaskiej

$$F_{\text{sr}} = 2 \pi L \frac{r_1 + r_1 + \Delta r}{2} = 6,28 \cdot 1 \cdot 0,11 = 0,691 \text{ m}^2$$

Dla zadanych warunków brzegowych ilość ciepła – uwzględniająca sumę dwu oporów cieplnych - wynosi :

$$Q = \frac{T_{1\text{pow}} - T_{2\text{ot}}}{\frac{\Delta r}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot F_{\text{sr}} \cdot \Delta \tau = \frac{90-30}{\frac{0,02}{50} + \frac{1}{5}} \cdot 0,691 \cdot 5 = 1034 \text{ J.}$$

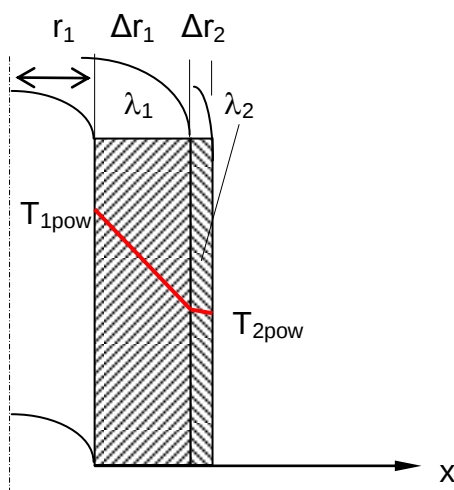
Przybliżone obliczenie wartości ciepła pociąga za sobą błąd równy około 9 %.

**ZADANIE B2** (TTT50)

Ścianka cylindryczna 2. warstwowa posiada promień wewnętrzny  $r_1 = 100$  mm oraz grubości ścianek (w kolejności od osi) odpowiednio : 20 mm i 10 mm. Temperatury powierzchni wewnętrznej ( $T_{\text{pow1}}$ ) i zewnętrznej ( $T_{\text{pow2}}$ ) wynoszą odpowiednio: 100 °C i 99 °C. Współczynniki przewodzenia:

$\lambda_1 = 4$  W / (m K) i  $\lambda_2 = 50$  W / (m K). Obliczyć liniową gęstość strumienia ciepłego  $q_L$ .

Streszczenie problemu: układ ma kształt cylindryczny i proces przewodzenia ciepła zachodzi zgodnie z warunkami WB1r. Liczba warstw wynosi  $n = 2$ .



Rys. B2. Ścianka cylindryczna dwuwarstwowa o grubościach  $\Delta r_1$  i  $\Delta r_2$  i współczynnikach przewodzenia ciepła  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$

$$q_L = \frac{2 \pi (T_{\text{pow1}} - T_{\text{pow2}})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad \text{czyli (dla } r_1 = 0,1 \text{ m) mamy:}$$

$$q_L = \frac{2 \pi (T_{\text{pow1}} - T_{\text{pow2}})}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{0,1+0,02}{0,1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_1 + 0,02 + 0,01}{r_1 + 0,02}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (100 - 99)}{\frac{1}{4} \ln 1,2 + \frac{1}{50} \ln \frac{0,13}{0,12}}$$

$$q_L = 2512 / (0,25 \cdot 0,182 + 0,02 \cdot 0,080) = 6,28 / (0,0455 + 0,0016) = 133 \text{ W/m}$$

=====

**ZADANIE B3A**

(Krytyczna grubość izolacji - TT47 / 603)ww4

Rura stalowa przez którą przepływa woda o temperaturze  $T_{\text{ot1}} = 120$  °C jest izolowana materiałem izolacyjnym o współczynniku  $\lambda_2 = 0,4$  W / (m K). Wyznaczyć wpływ wzrostu grubości izolacji na wartość strat ciepłych, znając:

- średnicę wewnętrzną rury  $d_1 = 0,06$  m , przy grubości ścianki  $g_1 = 4$  mm,
- współczynnik przewodzenia ciepła dla rury stalowej  $\lambda_1 = 50$  W / (m K),
- współczynnik wymiany ciepła na zewnętrznej powierzchni izolacji  $\alpha_2 = 5$  W/(m<sup>2</sup> K),

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

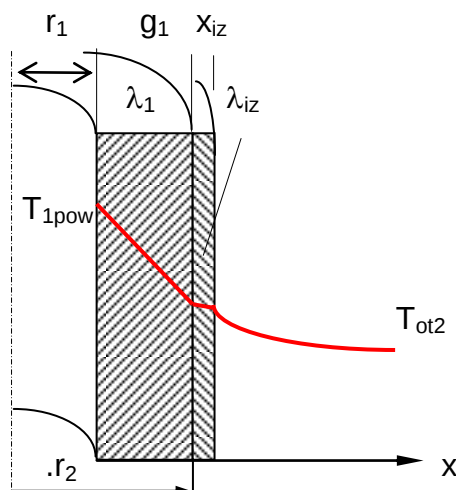
- temperaturę otoczenia równą  $T_{ot2} = 10^{\circ}\text{C}$ .

Założyć wartość temperatury wewnętrznej powierzchni równą  $T_{1pow} = T_{ot1} = 120^{\circ}\text{C}$ .

Zakładamy, że zmiana grubości izolacji nie zmienia współczynnika wymiany ciepła  $\alpha_2$ .

Wyznaczyć grubość warstwy izolacji przy której strumień ciepły zmniejsza się o 10 % w stosunku do rury nie posiadającej izolacji.

Schemat układu przedstawia rys. B3



Rys. B3. Ścianka cylindryczna z izolacją cieplną (o współczynnikach  $\lambda_1, \lambda_2$ ).

Z danych geometrycznych wynika:  $r_1 = 0,03 \text{ m}$ ,  $r_2 = r_1 + g_1 = 0,034 \text{ m}$ .

Liniowa gęstość strumienia ciepłego

$$q_L = \frac{2\pi (T_{pow1} - T_{ot2})}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_{iz}} \ln \frac{r_2 + x_{iz}}{r_2} + \frac{1}{\alpha_2 (r_2 + x_{iz})}} = \frac{2\pi (120 - 10)}{\frac{1}{50} \ln \frac{0,034}{0,03} + \frac{1}{0,3} \ln \frac{0,034 + x_{iz}}{0,034} + \frac{1}{5 (0,034 + x_{iz})}}$$

.czyli:  $q_L = f(x_{iz})$

Analizę przedstawimy w postaci bezwymiarowej wartości  $X = q_L(x_{iz}) / q_L(0)$ ,  
gdzie  $q_L(x_{iz} = 0) = 117,4 \text{ W/m}$ .

Wyniki obliczeń gęstości strumienia  $q_L$  dla  $\lambda_2 = 0,4 \text{ W/(m K)}$  dla zmiennej grubości  $x_{iz}$  [mm] przedstawia poniższa tabela ( $S_2$  i  $S_3$  to składniki zależne od grubości  $x_{iz}$  w mianowniku równania na  $q_L$ )

|          |       |       |       |       |       |       |      |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_{iz}$ | 0     | 10    | 46    | 100   | 230   | 340   | mm   |
| $q_L$    | 117,4 | 133,1 | 148,9 | 140,4 | 117,4 | 105,8 | W/ m |
| $X$      | 1     | 1,133 | 1,268 | 1,195 | 1     | 0,9   | -    |
| $Bi_2$   | 0,85  | 1,1   | 2     | 3,35  | 6,60  | 9,35  | -    |

Kryterium Biota dla rozpatrywanego przypadku definiowane jest

$Bi_2 = (d_2 + 2 x_{iz}) \cdot \alpha_2 / \lambda_1$  (w definicji liczby Biota stosuje się czasem „promień”  $r_2$ ).

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

Z analizy wynika, że wartość maksymalna strumienia ciepłego odpowiada wartości liczby  $Bi = 2$ . Jeżeli początkowa wartość liczby Biota - przy braku izolacji – jest większa od 2 wartości ekstremalne nie występują, czyli wzrost grubości izolacji powoduje spadek strat cieplnych.

Taki przypadek wystąpiłby w powyższym przykładzie np. dla promienia  $r_2 = 0,09$  m, ponieważ zachodzi wtedy:

$$Bi_2 > 2,25$$

### ZADANIE B3B

(zadanie kolokwialne z dnia 13.01.2010)

Proces przepływu ciepła przez ściankę cylindryczną dwuwarstwową zachodzi zgodnie z parametrami, wynikającymi z mieszanych warunkach brzegowych (1 rodzaju w obszarze przyległym do powierzchni wewnętrznej i 3 rodzaju w obszarze zewnętrznym).

Dane są parametry:

1. ścianka cylindryczna dwuwarstwową posiada promień wewnętrzny  $R = 100$  mm
2. grubości ścianek składowych (od osi) są równe odpowiednio: 5 mm i 2 mm, przy współczynnikach przewodzenia:  $\lambda_1 = 0,8$ ;  $\lambda_2 = 50$  W/(m<sup>2</sup> K),
3. temperatura odpowiadająca powierzchni o promieniu 100 mm (WB1r) wynosi  $T_{\text{pow1}} = 100$  °C,
4. temperatura otoczenia w obszarze zewnętrznym (tu WB3r !) jest równa  $T_{\text{ot2}} = 20$  °C.

Liniowa gęstość strumienia wynosi :

$$q_L = \frac{2\pi (T_{\text{pow1}} - T_{\text{ot2}})}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{100+5}{100} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{105+2}{105} + \frac{1}{0,107 \cdot 5}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (100 - 20)}{\frac{1}{0,8} \ln 1,05 + \frac{1}{50} \ln \frac{1,07}{1,05} + \frac{1}{0,535}}$$

### ZADANIE B4

(Zadanie kolokwialne z dnia 21.01.2010)

Rozpatrujemy ściankę cylindryczną dwuwarstwową z wymiana ciepła na powierzchniach wewnętrznej i zewnętrznej zgodnej z warunkiem brzegowym 3. rodzaju (WB3r). Obliczyć liniową gęstość strumienia ciepłego. Dane:

- a) średnica wewnętrzna układu  $D_w = 80$  mm,
- b) grubości obu ścianek składowych są równe i wynoszą 5 mm,
- c) współczynniki przewodzenia odpowiednio:  $\lambda_1 = 40$ ;  $\lambda_2 = 1,5$  W/(m<sup>2</sup> K),
- d) temperatura otoczenia na powierzchni wewnętrznej  $T_{\text{ot1}} = 520$  °C,
- e) temperatura otoczenia na powierzchni zewnętrznej  $T_{\text{ot2}} = 20$  °C

Liniowa gęstość strumienia wynosi :

$$q_L = \frac{2\pi (T_{\text{ot1}} - T_{\text{ot2}})}{\frac{1}{0,5 D_w \cdot \alpha_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{0,5 D_w + 0,005}{0,5 D_w} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{0,5 D_w + 0,01}{0,5 D_w + 0,005} + \frac{1}{0,5 (D_w + 0,01) \cdot \alpha_2}}$$

$$q_L = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 500}{\frac{1}{0,04 \cdot 30} + \frac{1}{40} \ln(9/8) + \frac{1}{1,5} \ln(10/9) + \frac{1}{0,05 \cdot 2}}$$

--

## 6. Nieustalone pole temperatury półprzestrzeni dla warunków brzegowych WB1r (nagrzewanie lub stygnięcie)

### 6.1. Wstęp teoretyczny

Badany układ odlew-forma spełnia warunki teoretycznego modelu jednokierunkowego przepływu ciepła na drodze przewodzenia, co pozwala na jego matematyczne ujęcie w postaci równania różniczkowego Fouriera:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

. gdzie:

T – temperatura,

x – współrzędna (odległość) [m]

$\tau$  - czas [s]

a – współczynnik wyrównywania temperatury (definicja), [m<sup>2</sup>/s]

$$a = \frac{\lambda}{c \rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

Rozwiązaniem równania (1) jest tzw. funkcja błędów Gaussa, opisująca pole temperatury:

$$\frac{T - T_{\text{pow}}}{T_0 - T_{\text{pow}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}} e^{-u^2} du = \text{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} \right) \quad (2)$$

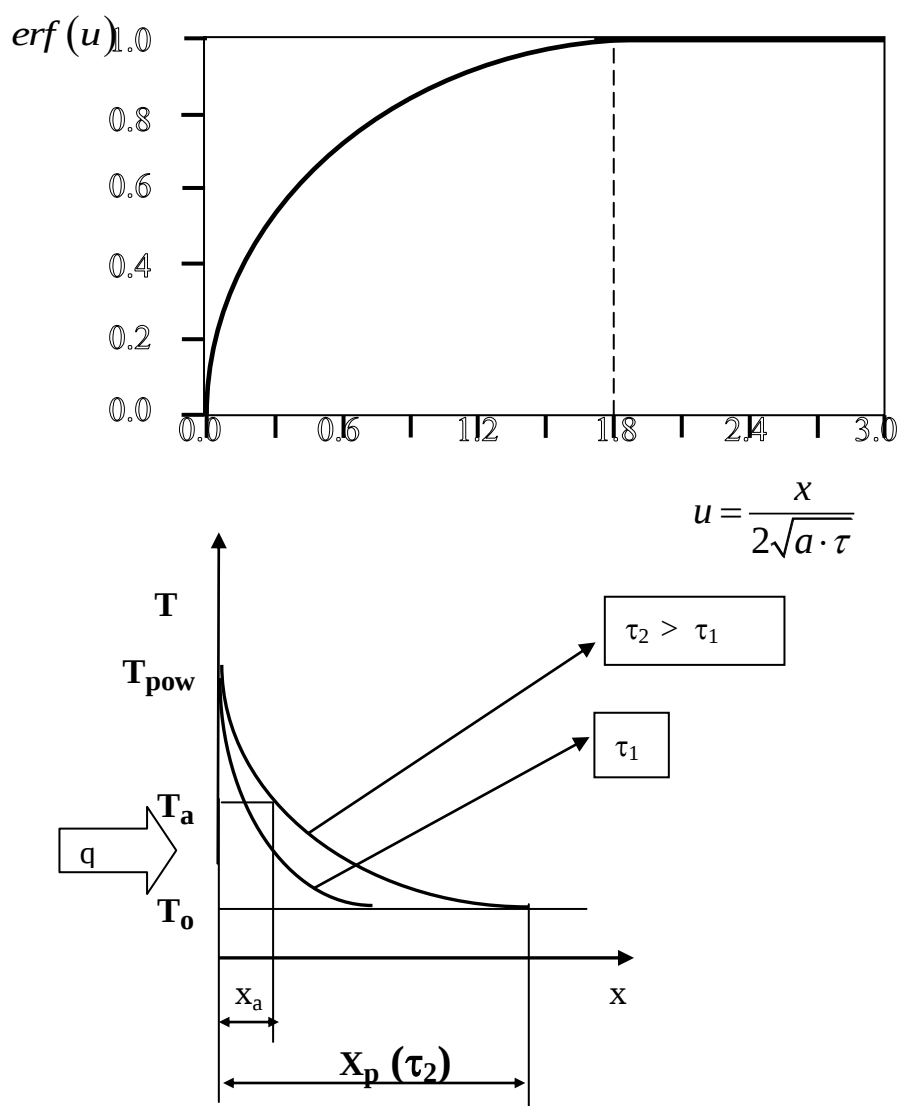
.gdzie : T<sub>0</sub> – temperatura początkowa,

T<sub>pow</sub> - temperatura powierzchni (stała).

Ułamek po lewej stronie równania (2) nazywamy bezwymiarową temperaturą (duże theta):

$$\theta = \frac{T - T_{\text{pow}}}{T_0 - T_{\text{pow}}} \quad (3)$$

Wykres funkcji błędów (2) ma postać



Rys. 3. Schemat pola temperatury i głębokości przegrzania  $X_p$  dla dwu momentów czasowych ( $\tau_1, \tau_2$ )

Głębokość przegrzania wynika z zależności:

$$X_p = 3,6 \sqrt{a_2 \tau} \quad , \text{ m} \quad (4)$$

Zastosowanie równania Fouriera (po obliczeniu gradientu temperatury) pozwala na określenie wartości strumienia ciepłego na powierzchni półprzestrzeni:

$$q_{\text{pow}} = \frac{\lambda (T_{\text{pow}} - T_o)}{\sqrt{a} \sqrt{\pi \tau}} = \frac{b \vartheta_{\text{pow}}}{\sqrt{\pi \tau}} \quad (5)$$

$$b = \sqrt{\lambda c \rho} \quad - \text{współczynnik akumulacji ciepła} \quad [\text{W s}^{1/2} / \text{m}^2 \text{ K}] \quad (6)$$

$\vartheta$  - różnica temperatur lub spiętrzenie temperatury (małe theta), np.:  $\vartheta_{pow} = T_{pow} - T_0$  (7)

We wzorze (7) wartość  $T_0$  jest temperaturą początkową półprzestrzeni.

Całkowite ciepło stygnięcia lub nagrzewania półprzestrzeni (lub ciał będących półprzestrzeniami w sensie cieplnym) wynika z całkowania równania (6) i wyrażone jest :

$$Q_{ak} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} b (T_{pow} - T_0) F \sqrt{\tau} \quad [J] \quad (8)$$

=

## 7. 1. Pole temperatury półprzestrzeni dla warunków brzegowych 1. rodzaju

### - zadania

#### **ZADANIE C1**

W grubościenniej formie piaskowej krzepnie odlew staliwnej płyty. Znane są dla formy współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda_2 = 0,67 \text{ W/(m K)}$  i współczynnik wyrównywania temperatury  $a_2 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$  (istnieje umowa, że parametry formy oznacza się indeksem 2). Określić głębokość przegrzania formy w obszarze o płaskiej powierzchni na1grzewania dla czasu  $\tau_1 = 150 \text{ s}$ . Znaleźć prawo przemieszczania się w formie izotermy o temperaturze  $T_a = 800 \text{ }^\circ\text{C}$ . Obliczyć gęstość strumienia cieplnego  $q_{pow}$  przepływającego przez powierzchnię kontaktu dla momentu  $\tau_1 = 150 \text{ s}$ . Założyć, że w badanym interwale czasu procesu nagrzewania na powierzchni formy panuje temperatura równa temperaturze likwidusu dla staliwa o zawartości 0,3 % C ( $T_{lik} = 1520 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

Tabela danych

| $T_{pow}$             | $T_0$               | $T_a$                | $\tau_1$ | $\lambda_2$      | $a_2$                                      | zaw. C |
|-----------------------|---------------------|----------------------|----------|------------------|--------------------------------------------|--------|
| 1520 $^\circ\text{C}$ | 20 $^\circ\text{C}$ | 800 $^\circ\text{C}$ | 150 s    | 0,67<br>W/ (m K) | $6 \cdot 10^{-8}$<br>$\text{m}^2/\text{s}$ | 0,3 %  |

Głębokość przegrzania formy

$$x_p = 3,6 \sqrt{a_2 \tau_1} = 3,6 \sqrt{6 \cdot 10^{-8} \cdot 150} = 108 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 10,8 \text{ mm}$$

Prawo przemieszczania izotermy o temperaturze  $T_a$  :

$$\theta_a = \frac{T_a - T_{pow}}{T_0 - T_{pow}} = \frac{800 - 1520}{20 - 1520} = 0,48$$

$$\theta_a = \text{erf}(u_a)$$

$$u_a = \arg \text{erf}(\theta_a) = \arg \text{erf}(0,48) = 0,455$$

$$x_a = x_{800} = 2 \sqrt{a_2 \tau} \cdot \arg \text{erf}(\theta_a) = 2 \cdot (6 \cdot 10^{-8} \cdot \tau)^{1/2} \cdot 0,455$$

$$x_{800} = 2,23 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\tau} \quad \text{m.}$$

Gęstość strumienia cieplnego dla czasu 150 s

$$b_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} = 2700 \text{ W s}^{1/2} / (\text{m}^2 \text{ K}).$$

$$q_{\text{pow}} = \frac{b_2 (T_{\text{pow}} - T_o)}{\sqrt{\pi \tau}} = \frac{2700 \cdot (1520 - 20)}{\sqrt{3,14 \cdot 150}}$$

$$q_{\text{pow}} = 1,86 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

Uwaga do ćwiczeń laboratoryjnych (listopad 2012) „Badanie współczynnika wyrównywania temperatury materiału formy piaskowej...” :

przyjąć temperaturę powierzchni  $T_{\text{pow}} = 380^\circ\text{C}$  (wg temp. krzepnięcia stopu Z41)

## ZADANIE C2

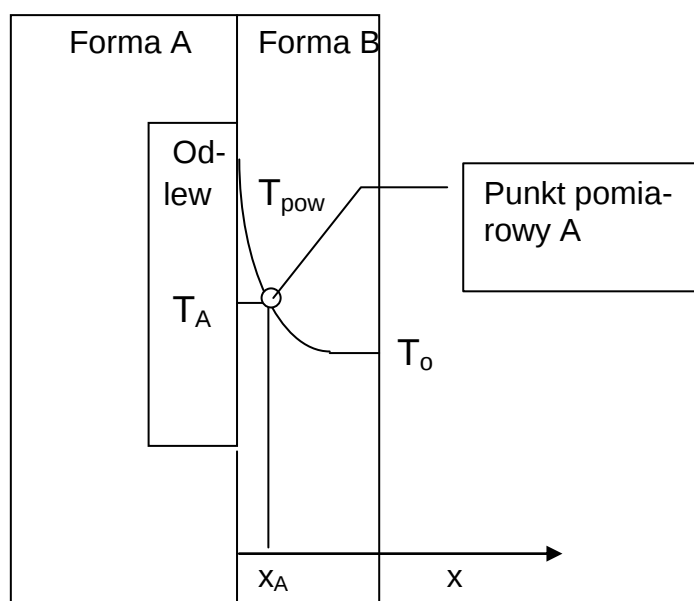
(ćwicz. audytoryjne z dnia 26.11.2009)

W formie piaskowej spełniającej warunek nieograniczoności w sensie cieplnym, krzepnie odlew aluminiowej płyty. Przed momentem zakrzepnięcia odlewu, po upływie czasu równego  $\tau_A = 360 \text{ s}$ , zmierzono - za pomocą termoelementu - temperaturę formy piaskowej w odległości od powierzchni kontaktu odlew-forma równej  $x_A = 0,01 \text{ m}$ . Jej wartość wyniosła  $T_A = 300^\circ\text{C}$ . Temperatura początkowa formy wynosiła  $T_o = 20^\circ\text{C}$ . Ponieważ czas pomiaru nie przekroczył czasu krzepnięcia odlewu, wynika stąd możliwość założenia wartości temperatury powierzchni  $T_{\text{pow}}$  równej temperaturze krzepnięcia odlewu, czyli

$$T_{\text{pow}} = T_{\text{kr}} = 660^\circ\text{C}.$$

Wyznaczyć wartość współczynnika wyrównywania temperatury dla materiału formy  $a_2$  oraz wartość współczynnika akumulacji  $b_2$ , jeżeli znamy gęstość i ciepło właściwe materiału formy równe:  $\rho_2 = 1700 \text{ kg/m}^3$  i  $c_2 = 1100 \text{ J/(kg K)}$ .

Schemat badanego układu



Parametry punktu pomiarowego A (  $T_A$  ,  $x_A$  ,  $\tau_A$  ) muszą spełniać równanie :

$$\Theta_A = \frac{T_A - T_{\text{pow}}}{T_0 - T_{\text{pow}}} = \text{erf} \left( \frac{x_A}{2\sqrt{a_2 \tau_A}} \right)$$

$$\Theta_A = \frac{480 - 660}{20 - 660} = 0,4375$$

$$u_A = \frac{x_A}{2\sqrt{a_2 \tau_A}} = \arg \text{erf}(\Theta_A) = \arg \text{erf}(0,4375) = 0,41$$

$$a_2 = \left( \frac{0,01}{2 \cdot 0,41 \sqrt{360}} \right)^2 = \underline{4,13 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}}$$

Z definicji powyższego współczynnika :

$$a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2}$$

$$\text{otrzymamy : } \lambda_2 = a_2 c_2 \rho_2 = 4,13 \cdot 10^{-7} \cdot 1100 \cdot 1700$$

$$\lambda_2 = \underline{0,773 \text{ W/(m K)}}.$$

$$\text{Współczynnik akumulacji } b_2 = \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2} = (0,773 \cdot 1100 \cdot 1700)^{1/2}$$

$$b_2 = \underline{1202 \text{ W s}^{1/2}/(\text{m}^2 \text{ K})}.$$

\*\*\* Nizej wyniki z programu komputerowego „Basic7.1”

Z Basica: tauc; a2c; lam2c, b2c

" 360 \*\* 4.13e-7 \*\* 0.773 \*\* 1202 \*\* u2c = 0.41 \*\* teta = 0.4375

**7.2. Tabela wartości funkcji błędów Gaussa erf (u)**

$$[ u = x/(2\sqrt{a \cdot \tau}) ]$$

| U    | erf u    | u    | erf u    | u    | erf u    | u    | erf u    |
|------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|
| 0.00 | 0.000 00 | 0.50 | 0.520 50 | 1.00 | 0.842 70 | 1.50 | 0.966 11 |
| 0.01 | 0.011 28 | 0.51 | 0.529 24 | 1.01 | 0.846 81 | 1.51 | 0.967 28 |
| 0.02 | 0.022 56 | 0.52 | 0.537 90 | 1.02 | 0.850 84 | 1.52 | 0.968 41 |
| 0.03 | 0.033 84 | 0.53 | 0.546 46 | 1.03 | 0.854 78 | 1.53 | 0.969 52 |
| 0.04 | 0.045 11 | 0.54 | 0.554 94 | 1.04 | 0.858 65 | 1.54 | 0.970 59 |
| 0.05 | 0.056 37 | 0.55 | 0.563 32 | 1.05 | 0.862 44 | 1.55 | 0.971 62 |
| 0.06 | 0.067 62 | 0.56 | 0.571 62 | 1.06 | 0.866 14 | 1.56 | 0.972 63 |
| 0.07 | 0.078 86 | 0.57 | 0.579 82 | 1.07 | 0.869 77 | 1.57 | 0.973 60 |
| 0.08 | 0.090 08 | 0.58 | 0.587 92 | 1.08 | 0.873 33 | 1.58 | 0.974 55 |
| 0.09 | 0.101 28 | 0.59 | 0.595 94 | 1.09 | 0.876 80 | 1.59 | 0.975 46 |
| 0.10 | 0.112 46 | 0.60 | 0.603 86 | 1.10 | 0.880 21 | 1.60 | 0.976 35 |
| 0.11 | 0.123 62 | 0.61 | 0.611 68 | 1.11 | 0.883 53 | 1.61 | 0.977 21 |
| 0.12 | 0.134 76 | 0.62 | 0.619 41 | 1.12 | 0.886 97 | 1.62 | 0.978 04 |
| 0.13 | 0.145 87 | 0.63 | 0.627 05 | 1.13 | 0.889 97 | 1.63 | 0.978 84 |
| 0.14 | 0.156 95 | 0.64 | 0.634 59 | 1.14 | 0.893 08 | 1.64 | 0.979 62 |
| 0.15 | 0.168 00 | 0.65 | 0.642 03 | 1.15 | 0.896 12 | 1.65 | 0.980 38 |
| 0.16 | 0.179 01 | 0.66 | 0.649 38 | 1.16 | 0.899 10 | 1.66 | 0.981 10 |
| 0.17 | 0.189 99 | 0.67 | 0.656 63 | 1.17 | 0.902 00 | 1.67 | 0.981 81 |
| 0.18 | 0.200 94 | 0.68 | 0.663 78 | 1.18 | 0.904 84 | 1.68 | 0.982 49 |
| 0.19 | 0.211 84 | 0.69 | 0.670 84 | 1.19 | 0.907 61 | 1.69 | 0.983 15 |
| 0.20 | 0.222 70 | 0.70 | 0.677 80 | 1.20 | 0.910 31 | 1.70 | 0.983 79 |
| 0.21 | 0.233 52 | 0.71 | 0.684 67 | 1.21 | 0.912 96 | 1.71 | 0.984 41 |
| 0.22 | 0.244 30 | 0.72 | 0.691 43 | 1.22 | 0.915 53 | 1.72 | 0.985 00 |
| 0.23 | 0.255 02 | 0.73 | 0.698 10 | 1.23 | 0.918 05 | 1.73 | 0.985 58 |
| 0.24 | 0.265 70 | 0.74 | 0.704 68 | 1.24 | 0.920 51 | 1.74 | 0.986 13 |
| 0.25 | 0.276 33 | 0.75 | 0.711 16 | 1.25 | 0.922 90 | 1.75 | 0.986 67 |
| 0.26 | 0.286 90 | 0.76 | 0.717 54 | 1.26 | 0.925 24 | 1.76 | 0.987 19 |
| 0.27 | 0.297 42 | 0.77 | 0.723 82 | 1.27 | 0.927 51 | 1.77 | 0.987 69 |
| 0.28 | 0.307 68 | 0.78 | 0.730 01 | 1.28 | 0.929 73 | 1.78 | 0.988 17 |
| 0.29 | 0.318 28 | 0.79 | 0.736 10 | 1.29 | 0.931 90 | 1.79 | 0.988 64 |
| 0.30 | 0.328 63 | 0.80 | 0.742 10 | 1.30 | 0.934 01 | 1.80 | 0.989 09 |
| 0.31 | 0.338 91 | 0.81 | 0.748 00 | 1.31 | 0.936 06 | 1.81 | 0.989 52 |
| 0.32 | 0.349 13 | 0.82 | 0.753 81 | 1.32 | 0.938 07 | 1.82 | 0.989 94 |
| 0.33 | 0.35928  | 0.83 | 0.759 52 | 1.33 | 0.940 02 | 1.83 | 0.990 35 |
| 0.34 | 0.369 36 | 0.84 | 0.765 14 | 1.34 | 0.941 91 | 1.84 | 0.990 74 |
| 0.35 | 0.379 38 | 0.85 | 0.770 67 | 1.35 | 0.943 76 | 1.85 | 0.991 11 |
| 0.36 | 0.38933  | 0.86 | 0.776 10 | 1.36 | 0.945 56 | 1.86 | 0.991 47 |
| 0.37 | 0.399 21 | 0.87 | 0.781 44 | 1.37 | 0.947 31 | 1.87 | 0.991 82 |
| 0.38 | 0.409 01 | 0.88 | 0.786 69 | 1.38 | 0.949 02 | 1.88 | 0.992 16 |
| 0.39 | 0.418 74 | 0.89 | 0.791 84 | 1.39 | 0.950 67 | 1.89 | 0.992 48 |
| 0.40 | 0.428 39 | 0.90 | 0.796 91 | 1.40 | 0.952 29 | 1.90 | 0.992 79 |
| 0.41 | 0.437 99 | 0.91 | 0.801 88 | 1.41 | 0.953 85 | 1.91 | 0.993 09 |

|             |          |             |          |             |          |             |          |
|-------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|
| <b>0.42</b> | 0.447 47 | <b>0.92</b> | 0.806 77 | <b>1.42</b> | 0.955 38 | <b>1.92</b> | 0.993 38 |
| <b>0.43</b> | 0.456 89 | <b>0.93</b> | 0.811 56 | <b>1.43</b> | 0.956 86 | <b>1.93</b> | 0.993 66 |
| <b>0.44</b> | 0.466 23 | <b>0.94</b> | 0.816 27 | <b>1.44</b> | 0.958 30 | <b>1.94</b> | 0.993 92 |
| <b>0.45</b> | 0.475 48 | <b>0.95</b> | 0.820 89 | <b>1.45</b> | 0.959 70 | <b>1.95</b> | 0.994 18 |
| <b>0.46</b> | 0.484 66 | <b>0.96</b> | 0.825 42 | <b>1.46</b> | 0.961 05 | <b>1.96</b> | 0.994 43 |
| <b>0.47</b> | 0.49375  | <b>0.97</b> | 0.829 87 | <b>1.47</b> | 0.962 37 | <b>1.97</b> | 0.994 66 |
| <b>0.48</b> | 0.502 75 | <b>0.98</b> | 0.834 23 | <b>1.48</b> | 0.963 65 | <b>1.98</b> | 0.994 89 |
| <b>0.49</b> | 0.511 67 | <b>0.99</b> | 0.838 51 | <b>1.49</b> | 0.964 90 | <b>1.99</b> | 0.995 11 |

## 8. Rozwiązywanie zagadnień cieplnych z zastosowaniem bilansu cieplnego

### 8.1. Pojęcie bilansu cieplnego

Założmy, że dwa ciała o różnych temperaturach umieścimy w układzie izolowanym termicznie (np. z wirtualną osłoną adiabatyczną). Powstanie pewne, nowe pole temperatur, z którego wynikają gradienty temperatur wymuszające proces przepływu ciepła. W miarę upływu czasu wartości gradientów temperatury będą zmierzać do zera a cały układ zmierzał będzie do stanu termodynamicznej równowagi, w którym zapanuje jednokowa temperatura. Przykładem takiego układu jest zimna forma odlewnicza wypełniona (nie zalana !) ciekłym czyli gorącym metalem. Z zasady zachowania energii wynika, że ilość ciepła pobrana przez ciało chłodniejsze (forma) musi być równa ilości oddanej przez ciało cieplejsze (metal).

Bilans cieplny to algebraiczne zestawienie wszystkich zmian energii cieplnej zachodzących w podobszarach (ciałach) rozpatrywanego układu. Po jednej stronie bilansu muszą być uwzględnione wszystkie ciała, które ciepło tracą (np. po lewej) a po przeciwnej wszystkie, które je pobierają. Przykładem może być bilans cieplny dla układu odlew-forma- otoczenie odniesiony do odpowiednio wybranego interwału czasowego:

$$Q_1 = Q_2 + Q_{ot} \quad [J] \quad (3)$$

gdzie:  $Q_1$  – ciepło oddane przez metal odlewu,

$Q_2$  – ciepło pobrane przez materiał formy,

$Q_{ot}$  – ciepło oddane do otoczenia.

Jeżeli forma jest grubościenna w sensie cieplnym to istnieje duży interwał czasowy w którym nie ma przepływu ciepła do otoczenia (np. do momentu całkowitego zakrzepnięcia odlewu).

Wtedy bilans miałby postać:

$$Q_1 = Q_2 \quad [J] \quad (4)$$

Jedną z fundamentalnych i najważniejszych zależności („definicji”) - opisujących elementarną zmianę ilości ciepła przy nagrzewaniu lub stygnięciu ciała - jest równanie wyrażające elementarne ciepło akumulacji, oparte na pojęciu ciepła właściwego. Ma ono postać:

$$dQ_{ak} = m c dT \quad [J] \quad [5], \text{ lub}$$

$$dQ_{ak} = V \rho c dT \quad [J] \quad [6]$$

gdzie:  $m$  – masa,  $c$  – ciepło właściwe,  $T$  - temperatura,  
 $V$  – objętość,  $\rho$  - gęstość.

## 8.2. Zastosowanie bilansu cieplnego - zadania

### ZADANIE D1 (TT40)

Pojęcie ciepła przegrzania ( $Q_p$ ) odnosi się do wartości ciepła jaką musi oddać odlew aby mógł się rozpocząć proces krzepnięcia metalu, który rozpoczyna się w stałej temperaturze krzepnięcia lub w temperaturze likwidusu. Załóżmy, że odlew aluminiowy o masie  $m = 50$  kg oddał do formy ciepło przegrzania równe  $Q_p = 2600$  kJ. Należy określić stopień przegrzania metalu  $\Delta T_p$  będący - z definicji - różnicą między temperaturą początkową metalu w momencie zapełnienia wnęki formy  $T_{1p}$  a temperaturą krzepnięcia aluminium. Obliczyć również wartość temperatury początkowej metalu w momencie zapełnienia wnęki formy. Temperatura krzepnięcia aluminium wynosi  $660^\circ\text{C}$ . Istnieje umowa, że parametry metalu odlewu oznacza się indeksem dolnym 1.

Stopień przegrzania (wg definicji):  $\Delta T_p = T_{1p} - T_{kr}$ , [K]

Bilans ma postać:

$$Q_p = m_1 \cdot c_1 \cdot \Delta T_p = m_1 c_1 (T_{1p} - T_{kr}), [\text{J}]$$

Z tablic odczytujemy ciepło właściwe metalu odlewu (aluminium):

$$c_1 = 1300 \text{ J/ (kg K)}$$

Podstawiamy dane do bilansu:

$$2600 \cdot 10^3 = 50 \cdot 1300 \cdot \Delta T_p, \text{ stąd stopień przegrzania}$$

$$\Delta T_p = 2000 / 50 = 40 \text{ K.}$$

$$\text{Temperatura początkowa } T_{1p} = T_{kr} + \Delta T_p = 660 + 40 = 700^\circ\text{C}$$

### ZADANIE D2

W formie piaskowej stygnie (odprowadzając ciepło przegrzania) a potem krzepnie (ciepło krzepnięcia) odlew aluminiowy o masie  $m = 50$  kg. Ile ciepła musi zakumulować forma - grubościenna w sensie cieplnym – aby nastąpiło całkowite zakrzepnięcie odlewu (czas ten oznacza się przez  $\tau_3$ ). Przyjąć jako dane wartości podane w zadaniu 7. Ciepło krzepnięcia aluminium wynosi  $390\,000$  J/kg.

Bilans cieplny ma postać:

$$Q_{1p} + Q_{kr} = Q_2 + Q_{ot} \quad \text{gdzie:}$$

$Q_{1p}$  – ciepło przegrzania metalu odlewu (oznacza się też przez  $Q_p$ ),

$Q_{kr}$  – ciepło krzepnięcia metalu (aluminium),

$Q_2$  – ciepło akumulowane przez formę grubościenną (wartość szukana!),

$Q_{ot}$  – ciepło oddawane do otoczenia przez zewnętrzną powierzchnię formy.

Forma grubościenna w sensie cieplnym nie oddaje ciepła do otoczenia przed czasem zakrzepnięcia odlewu, czyli  $Q_{ot} = 0$ .

Z danych w zadaniu nr 7 wynika:

$$Q_{1p} = m_1 \cdot c_1 \cdot \Delta T_p = 2600 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Wartość całkowitego ciepła krzepnięcia  $Q_{kr}$  wynika z definicji „ciepła krzepnięcia metalu L”

$$L = Q_{kr} / m_1 \quad [\text{J/ kg}], \text{ czyli:}$$

$$Q_{kr} = m_1 \cdot L \quad [\text{J}]$$

Szukaną ilość ciepła  $Q_2$  uzyskujemy z bilansu cieplnego po przekształceniu do postaci:

$$Q_2 = Q_{1p} + Q_{kr} = 2\,600\,000 + 50 \cdot 390\,000 = 22\,100 \text{ kJ} = 22,1 \text{ MJ.}$$

- - - - -

**ZADANIE D3** (Zastosowanie bilansu do wyznaczenie współczynnika wymiany ciepła)

(dawniej nr 3, wg pliku : Z3-WspWymCiepłaWB3-Pomiar-Zad3 –w7 \* 25.11.2009)

Płyta mosiężna o grubości 2 mm chłodzona jest w powietrzu w warunkach konwekcji swobodnej. Duża wartość współczynnika przewodzenia ciepła mosiądzu (równa ok. 120 W/m K dla temp. 100 °C) przy małej grubości ciała, pozwalają na pominięcie występującego w płycie - bardzo małego - spadku temperatury (rys. 1). Dane pomiarowe, uzyskane z termoelementu zamontowanego w płaszczyźnie symetrii płyty, pozwalają na uzyskanie czasowego przebiegu krzywej stygnięcia w postaci tabelarycznej (dyskretnej), stanowiącej dyskretny opis funkcji  $T_{sr} = f(\tau)$ . Ciało stygnie przy temperaturze otoczenia wynoszącej  $T_{ot} = 20^\circ \text{C}$ . Znaleźć zależność efektywnego współczynnika wymiany ciepła w funkcji temperatury chłodzonej powierzchni metalu. Uzyskane dane pomiarowe przedstawiono w tabeli 1.

Uwaga: uzasadnione pominięcie spadku temperatury w obszarze płyty pozwala na wykorzystanie zależności:  $T(x, \tau) = T_{pow}(\tau)$

TABELA 1. Przebieg krzywej stygnięcia ciała

|                          |     |     |     |     |     |     |     |     |      |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| Czas, s                  | 0   | 10  | 20  | 30  | 40  | 50  | 60  | 70  | 80   |
| $T_{pow}^\circ \text{C}$ | 702 | 572 | 476 | 412 | 360 | 320 | 288 | 260 | 236  |
| Czas, s                  | 90  | 100 | 110 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 | 220  |
| $T_{pow}^\circ \text{C}$ | 216 | 198 | 183 | 170 | 147 | 129 | 114 | 101 | 90,5 |

Wprowadzenie teoretyczne

Do rozwiązania zadania potrzebne jest równanie bilansu cieplnego, sformułowane z użyciem szukanego współczynnika wymiany ciepła. Zapis tego bilansu wymaga przypomnienia dwu podstawowych zależności („definicji”) opisujących elementarną zmianę ilości ciepła:

- a) elementarne ciepło akumulacji (przy nagrzewaniu lub stygnięciu)

$$dQ_{ak} = m c dT \quad [J] \quad \text{lub}$$

$$dQ_{ak} = V \rho c dT \quad [J]$$

gdzie:  $m$  – masa,  $c$  – ciepło właściwe,  $T$  – temperatura,

$V$  – objętość,  $\rho$  – gęstość.

- b) elementarne ciepło wymieniane na powierzchni ciała do otoczenia przy warunkach brzegowych 3. rodzaju (warunki brzegowe Newtona)

$$dQ_{3r} = \alpha F (T_{pow} - T_{ot}) \quad [J], \quad \text{lub}$$

$$dQ_{3r} = \alpha F (T_{ot} - T_{pow}) \quad [J]$$

gdzie:  $\alpha$  – efektywny współczynnik wymiany ciepła,  $[W/(m^2 K)]$

$F$  – powierzchnia wymiany ciepła,

$T_{pow}$  – temperatura powierzchni,

$T_{ot}$  – temperatura otoczenia.

Rozwiązanie

Bilans cieplny ma postać :

$$dQ_{3r} = dQ_{ak}$$

Uwzględniając, że  $dT_{pow} < 0$  otrzymamy:

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

$$\alpha (T_{\text{pow}} - T_{\text{ot}}) F d\tau = -V_1 \rho_1 c_1 dT_{\text{pow}} \quad (1)$$

Wprowadzimy pojęcie charakterystycznego wymiaru płyty  $X_1$  i pojęcie spiętrzenia temperatury  $\mathcal{G}_{\text{pow}}$

$$X_1 = V_1 / F \quad \text{oraz} \quad \mathcal{G}_{\text{pow}} = T_{\text{pow}} - T_{\text{ot}}$$

Po przekształceniach równania bilansu (1) otrzymamy równanie opisujące procedurę wyznaczanie szukanej wartości współczynnika wymiany:

$$\alpha = -X_1 \rho_1 \frac{c_1}{\mathcal{G}_{\text{pow}}} \frac{dT_{\text{pow}}}{d\tau} \quad (2)$$

Z tablic odczytamy dla miedzi  $\rho_1 = 8600 \text{ kg/m}^3$  oraz  $c_1 = 390 \text{ J/(kg K)}$ .

Łatwo wykazać, że wymiar  $X_1$  to połowa grubości płyty czyli:  $X_1 = V_1 / F = g / 2 = 0.001 \text{ m}$

Poniższa tabela obrazuje pierwszą metodę rozwiązania zadania, przy odniesieniu wartości pochodnych do średniej wartości temperatury ciała (lub temperatury powierzchni!).

TABELA 2a

| $\tau$              | 0    | 10   | 20   | 30   | 40   | 50   | 60   | 70   | 80   | 90  |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| $T_{\text{pow}}$    | 702  | 572  | 476  | 412  | 360  | 320  | 288  | 260  | 236  | 216 |
| $-dT/d\tau$         | 13   | 9,6  | 6,4  | 5,2  | 4    | 3,2  | 2,8  | 2,4  | 2    |     |
| $T_{\text{pow.sr}}$ | 636  | 524  | 444  | 386  | 340  | 304  | 274  | 248  | 226  |     |
| $\alpha$            | 70,8 | 63,9 | 50,6 | 47,6 | 41,9 | 37,8 | 37,0 | 35,3 | 32,6 |     |

TABELA 2b

| $\tau$              | 90   | 100  | 110 | 120  | 140  | 160  | 180   | 200  | 220  |
|---------------------|------|------|-----|------|------|------|-------|------|------|
| $T_{\text{pow}}$    | 216  | 198  | 183 | 170  | 147  | 129  | 114   | 101  | 90,5 |
| $-dT/d\tau$         | 1,8  | 1,5  | 1,3 | 1,15 | 0,9  | 0,75 | 0,65  | 0,52 |      |
| $T_{\text{pow.sr}}$ | 207  | 190  | 176 | 158  | 138  | 122  | 107,5 | 96   |      |
| A                   | 32,3 | 29,6 | 28  | 28   | 25,6 | 24,7 | 24,9  | 22,9 |      |

Analiza obliczonych wartości współczynnika alfa wykazuje pewne niedokładności dla temperatur powierzchni płyty poniżej 125 stopni.

Dlatego zastosujemy drugą metodę rozwiązania problemu, polegającą na wygładzeniu przebiegu krzywej stygnięcia poprzez opisanie jej kształtu przy użyciu funkcji hiperbolicznej.

Analiza matematyczna dla wybranych punktów doświadczalnych krzywej stygnięcia ciała (płyty) pozwala na uzyskanie przybliżonego równania kinetyki stygnięcia w postaci:

$$T_{\text{pow}} = -43,8 + \frac{36093}{\tau + 48,8} \quad (3)$$

Pochodna tej funkcji ma postać:

$$\frac{dT_{\text{pow}}}{d\tau} = - \frac{36093}{(\tau + 48,8)^2} \quad (4)$$

Wzór końcowy ma zatem postać:

$$\alpha = X_1 \rho_1 c_1 \frac{36093}{g_{\text{pow}} (\tau + 48,8)^2} = 0,001 \cdot 8600 \cdot 390 \cdot \frac{36093}{g_{\text{pow}} (\tau + 48,8)^2} \dots [\text{W/m}^2\text{K}] \quad (5)$$

Aby uzyskać szukany przebieg zmienności współczynnika w zadanym zakresie temperatury powierzchni należy z równania (3) wyznaczyć:

$$\tau = \frac{36093}{T_{\text{pow}} + 43,8} - 48,8 \quad (6)$$

Równania (5) i (6) pozwalają na uzyskanie wartości współczynnika wymiany ciepła jako funkcji temperatury powierzchni. Funkcję tę przedstawiono w tabeli 2 ( wg programu komputerowego ALFA-Z7.exe).

Tabela 2. Wyniki końcowe przebiegu temperaturowej zmienności współczynnika wymiany ciepła według drugiej metody obliczeniowej

| Temp.<br>pow. | 100  | 150  | 200  | 250  | 300  | 350  | 400  | 450  | 500  | 550  | 600  | 700  |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| .α            | 24,0 | 26,8 | 30,7 | 34,9 | 39,2 | 43,7 | 48,2 | 52,7 | 57,3 | 61,8 | 66,4 | 75,6 |

(wg pliku :Zad123456789... W18)

== =

## **9. Nieustalone pole temperatury. Ciała klasyczne nagrzewane**

Termodynamika technika ciepła & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

### w warunkach brzegowych 3. rodzaju.

#### 9.1. Wprowadzenie

Doświadczenie oparte jest na modelu matematycznym opisującym pole temperatury ciał klasycznych (np. walca) przy ustalonych warunkach brzegowych 3. rodzaju.

Do ciał klasycznych zaliczamy:

- płytę o nieograniczonej długości i szerokości,
- walec o nieograniczonej („nieskończonej”) długości,
- kulę,
- półprzestrzeń (pominiemy ją w dalszych rozważaniach).

Funkcja opisująca nieustalone pole temperatury ciał klasycznych (a, b, c) powstaje w wyniku całkowania równań różniczkowych przewodzenia ciepła dla tych ciał, przy zastosowaniu warunku brzegowego 3. rodzaju.

Każde z tych rozwiązań przedstawić można w postaci ogólnej, w której wartość temperatury jest funkcją 9. zmiennych:

$$T = f(x, X, \lambda, c, \rho, T_0, T_{ot}, \alpha, \tau) \quad (1),$$

gdzie:  $x = r$  - współrzędna (promień) rozpatrywanej powierzchni izotermicznej,

$X$  - charakterystyczny wymiar ciała (połowa grubości płyty lub promień walca  $R_k$ ),

$T_{ot}$  - temperatura otoczenia,

$\alpha$  - współczynnik wymiany ciepła.

**Zastosowanie teorii podobieństwa pozwala funkcję (1) zastąpić równaniami kryterialnymi, opartymi na liczbach bezwymiarowych (kryteria podobieństwa):**

**a) bezwymiarowa temperatura  $\theta = (T - T_{ot}) / (T_0 - T_{ot})$**

$$\Theta = \frac{T - T_{ot}}{T_0 - T_{ot}} \quad (\text{funkcja 3 liczb bezwymiarowych})$$

**b) kryterium Fouriera :**

$$Fo = a \tau / X^2, \quad a = \lambda / (c \rho)$$

**c) kryterium Biota :**

$$Bi = \alpha \cdot \lambda / X,$$

**d) bezwymiarowa współrzędna  $x / X$  ( oznaczane też przez  $K_x$  ,  $K_x \in [0, 1]$  ).**

Ujęcie kryterialne pola temperatury walca można teraz przedstawić

$$\theta = f(Fo, Bi, k_x) \quad (2)$$

Zastosowanie ujęcia bezwymiarowego pozwala na wykreślne przedstawienie temperatury ciał klasycznych za pomocą tzw. nomogramów, w których (najczęściej) bezwymiarowa współrzędna  $x / X$  ma wartość ustaloną. Wartość  $x / X = 0$  odpowiada osi walca, kuli lub

płaszczyzny symetrii nieograniczonej płyty. Wartość  $x/X = 1$  odpowiada powierzchni ciała. Równania i nomogramy opisujące proces nagrzewania ciał klasycznych zachowują również ważność przy opisie procesu chłodzenia.

## 9.2. Wstęp teoretyczny do ćwiczenia laboratoryjnego nr 1 (TTT71)

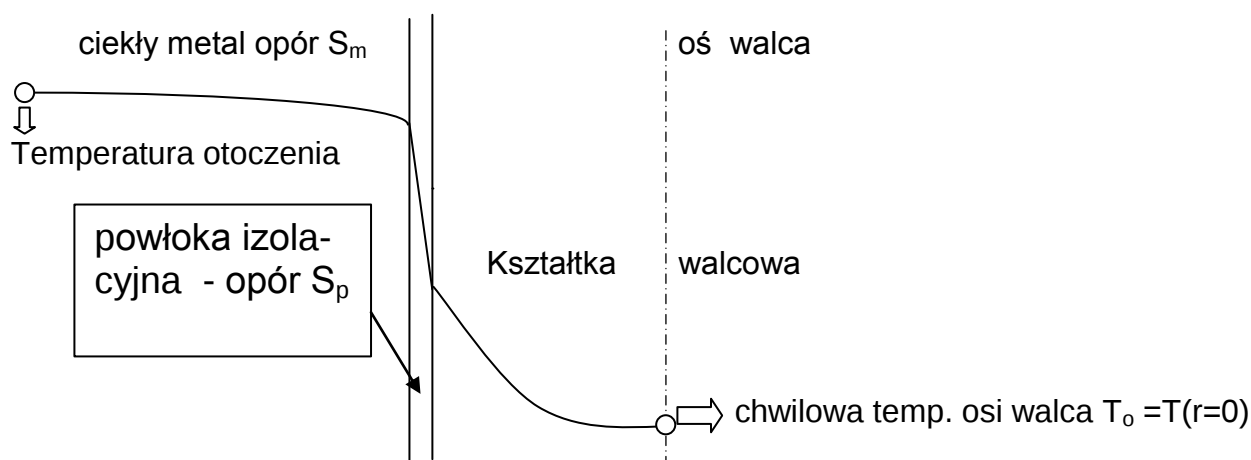
„Badanie współczynnika wymiany ciepła i współczynnika przewodzenia ciepła powłoki izolacyjnej – warunki brzegowe 3. rodzaju” \*\* (ćw. labor.- 17.11.2010, 6.11.2012)

Rozpatrzmy przypadek nagrzewania osi nieograniczonego walca o wymiarze charakterystycznym  $X_k$  równym promieniowi, pozwalający na doświadczalne badanie współczynnika wymiany ciepła  $\alpha$  (podstawowy parametr określający warunki brzegowe WB3r).

Walec ten posiada na powierzchni cylindrycznej (zewnątrznej) cienką warstwę powłoki izolacyjnej spełniającą rolę oporu cieplnego przy wymianie ciepła między kształtką walcową (stalową) i otoczeniem. Otoczenie kształtki - w sensie cieplnym – składa się z warstwy powłoki i obszaru ciekłego metalu znajdującego się w odpowiednio dużym tyglu. Występują więc dwa opory wymiany ciepła:

- opór warstwy powłoki izolacyjnej, równy  $S_p = X_p / \lambda_p$ ,
- opór obszaru ciekłego metalu, równy  $S_m = 1 / \alpha_m$ .

Opory te przedstawiono na rys. A.



Oznaczając sumaryczny współczynnik wymiany ciepła przez  $\beta$  możemy zapisać efektywny opór cieplny przepływu ciepła przez powłokę w postaci:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha_p} + \frac{1}{\alpha_m} \quad (2)$$

Badania eksperymentalne i pozwalają oszacować wartość współczynnika  
 Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

$\alpha_p$  w granicach 300 – 1000, a obliczenia tego współczynnika dla ciekłych metali wskazują na zakres jego wartości w zakresie  $\alpha_m = 30\,000$  do  $60\,000$  (przykładowo  $1/300 + 1/30000 \approx 1/300$ ). Pozwala to na uproszczony zapis efektywnego (zastępczego, sumarycznego) współczynnika wymiany ciepła wzoru w postaci:

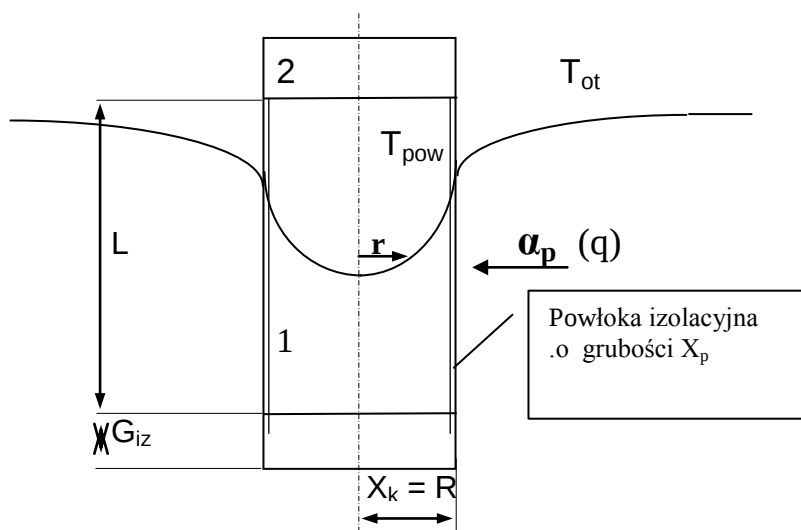
$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha_p} = \frac{X_p}{\lambda_p} \quad (3)$$

Z równania (3) wynika, że w warunkach tego eksperymentu wartość efektywnego współczynnika wymiany ciepła zależy wyłącznie od parametrów powłoki ( $\lambda_p$ ,  $X_p$ ) i jest on równoważny współczynnikowi wymiany ciepła przez powłokę  $\alpha_p$ .

Upoważnia to do stwierdzenia, że badany współczynnik  $\alpha_p$  jest elementem liczby Biota:

$$Bi = \beta X_k / \lambda_k = \alpha_p X_k / \lambda_k$$

Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. B



**Rys. B.** Kształtka stalowa do badań nagrzewania osi „nieograniczonego” walca (1 – kształtka cylindryczna [indeks k], 2 – gruba warstwa izolacyjna, p – badana powłoka)

### Przeprowadzenie pomiaru

Projekt układu pomiarowego bazuje na założeniu, że efektywny współczynnik wymiany ciepła zależy wyłącznie od oporu cieplnego powłoki izolacyjnej tj.  $S = 1/\alpha_p = X_p/\lambda_p$ . Pozwala to na sformułowanie następującej zależności opisującej wartość zastępczego współczynnika wymiany ciepła:

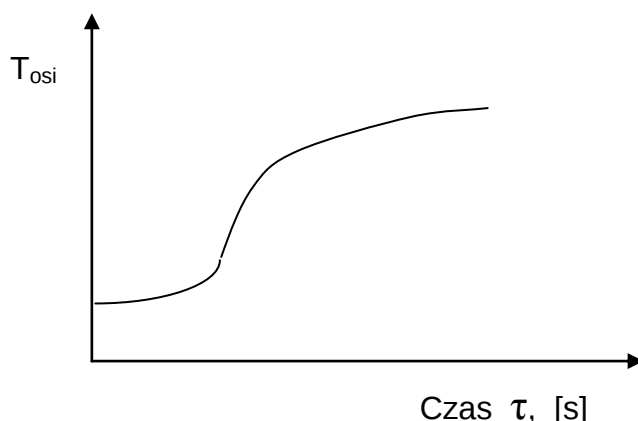
$$\alpha_p = \lambda_p / X_p$$

Kształtka stalowa (1) pokryta jest na powierzchni cylindrycznej badaną powłoką izolacyjną. W celu wyeliminowania osiowego przepływu ciepła obie czołowe powierzchnie kształtki pokryte są grubą warstwą izolacyjną (2), o dużym oporze cieplnym (powinien być kilkadziesiąt razy większy od oporu powłoki badanej „p”).

Podłączony do aparatu rejestrującego termoelement, zamontowany w osi kształtki walcowej,

pozwała na wyznaczenie krzywej nagrzewania punktu pomiarowego.

Przebieg krzywej nagrzewania przedstawiono schematycznie na rys. B



Z krzywej nagrzewania wybiera się – przykładowo – 5 punktów, których współrzędne przedstawia się w postaci wielkości bezwymiarowych ( $\theta$  i  $Fo$ ) opisujących nagrzewania osi klasycznego walca. Procedura obliczeń przedstawiona jest w arkuszu obliczeniowym.

### 9.3. Obliczenie współczynnika wymiany ciepła **ZADANIE 11**

Poniższa tabela przedstawia bezwymiarowe ujęcie przykładowych wyników nagrzewania osi walca ( $a_k = 1,04 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\lambda_k = 46 \text{ W}/(\text{m K})$ ) i dla grubości powłoki  $X_p = 0,0005 \text{ m}$ ). Walec jest izolowany na powierzchniach czołowych, czyli spełnia warunek walca nieskończonego w sensie cieplnym. Temperatura otoczenia jest temperaturą ciekłego metalu i wynosi  $T_{ot} = 650 \text{ }^\circ\text{C}$ . Początkowa temperatura kształtki walcowej wynosi  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Badana powłoka znajduje się na powierzchni cylindrycznej. Indeks „k” oznaczmy parametry materiału kształtki walcowej (stal węglowa). Średnica walca wynosi 50 mm czyli charakterystyczny wymiar  $R_k = X_k = 0,025 \text{ m}$ .

Dla średniej temperatury nagrzewania, wynoszącej około  $400 \text{ }^\circ\text{C}$  mamy dla stali:

- ciepło właściwe  $c_k = 550 \text{ J}/(\text{kg K})$ ,
- współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda_k = 46 \text{ W}/(\text{m K})$ , ( patrz tabela 4 s. 54)
- gęstość  $\rho = 7800 \text{ kg}/\text{m}^3$ .
- $a_k = \lambda_k / (c_k \rho_k) = 46 / (550 \cdot 7800) = 1,07 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

|                                                          |       |       |
|----------------------------------------------------------|-------|-------|
| Czas , s                                                 | 60    | 120   |
| $T_{osi}$                                                | 270   | 440   |
| $ Fo $                                                   | 0,977 | 1,95  |
| $\theta = \frac{T_{osi} - T_{ot}}{T_0 - T_{ot}}$         | 0,603 | 0,333 |
| $ Bi = \alpha_p \cdot X_k / \lambda_k $<br>(z nomogramu) | 0,3   | 0,32  |
| $\alpha_p = Bi \lambda_k / X_k$                          | 504   | 538   |
| $\lambda_p = \alpha_p X_p$                               | 0,252 | 0,268 |

Umownie przyjmujemy, że 90 % powłok izolacyjnych spełnia warunek opisujący wartości

współczynnika przewodzenia ciepła w postaci :

$$0,1 < \lambda_p < 0,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (\text{A})$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że współczynnik wymiany ciepła w badanym układzie może być wyznaczony bez znajomości grubości powłoki izolacyjnej. Jest to podstawowy błąd w sprawozdaniach z ćwiczenia laboratoryjnego nr 4 ( listopad 2011 r.)

Ważniejsze oznaczenia

$$a = \frac{\lambda}{c \rho} \quad \text{-- współczynnik wyrównywania temperatury,}$$

.  $\lambda_k, \lambda_p$  - współczynniki przewodzenia ciepła.

#### 9. 4. Przykład niepoprawnego wyznaczania współczynnika przewodzenia ciepła powłoki izolacyjnej

Celem tego przykładu jest wyciągnięcie wniosków z typowych błędów zauważonych w 50 % sprawozdań z laboratorium w listopadzie 2011 r. W tabeli ilustrującej przebieg obliczeń przyjęto następujące dane:

$\alpha_k = 1,04 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  ,  $\lambda_k = 44 \text{ W}/(\text{m K})$  , promień kształtki walcowej czyli charakterystyczny wymiar  $R_k = X_k = 0,025 \text{ m}$ , grubość powłoki  $X_p = 0,5 \text{ mm}$ ,  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_{ot} = 650 \text{ }^\circ\text{C}$ .

|                                                  |                                               |                     |                       |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------|-----------------------|
| Czas , s                                         | 120                                           | Uwagi               | Jedn.                 |
| $T_{osi}$                                        | 440                                           | --                  | $^\circ\text{C}$      |
| Fo                                               | $= 1,04 \cdot 10^{-5} * 120 / 0,025^2 = 1,95$ | poprawnie           | -                     |
| $\theta = \frac{T_{osi} - T_{ot}}{T_0 - T_{ot}}$ | $= (440 - 650 / (20 - 650) = 0,333$           | poprawnie           | -                     |
| Odczyt Bi<br>.z nomogramu                        | Bi = 0,32                                     | poprawnie           | -                     |
| $Bi = \alpha_p \cdot X_p / \lambda_k$            | - - -                                         | <b>niepoprawnie</b> | -                     |
| $\alpha_p = Bi \cdot \lambda_k / X_p$            | $= 0,32 * 44 / 0,0005 = 28\,160$              | <b>niepoprawnie</b> | W/ (m <sup>2</sup> K) |
| $\lambda_p = \alpha_p X_p$                       | $= 28\,160 * 0,0005 = \text{14,08 !}$         | <b>niepoprawnie</b> | W/ (m K)              |

Niepoprawnie obliczona wartość współczynnika przewodzenia ciepła powłoki izolacyjnej nie spełnia warunku określonego nierównością ( A ) , ponieważ

$$\lambda_p \gg 0,5$$

Analizując wynik niepoprawnych obliczeń można zauważyć, że wartości współczynnika zbliżone do **14** W/(m K) mają niektóre stopy metali, np. stale chromoniklowe (ok.14 - 16).

#### 9.5. Zadania (WB3r- nagrzewanie ciał klasycznych ) E1 E2

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

Płyta żeliwna o grubości 60 mm posiada wymiary gabarytowe pozwalające na pomiar ilości ciepła wymienianego przez jej powierzchnie czołowe. Warunki brzegowe procesu nagrzewania płyty określone są wartością temperatury otoczenia równej  $700^{\circ}\text{C}$  oraz współczynnikiem wymiany ciepła równym  $\alpha = 30 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Temperatura początkowa procesu nagrzewania  $T_o = 50^{\circ}\text{C}$ . Określić różnicę temperatur (spadek) pomiędzy środkiem i powierzchnią płyty po czasie  $\tau = 12 \text{ min}$ . Potrzebne dane termofizyczne dla żeliwa przyjąć z tablic.

Analogiczne obliczenia wykonać także dla nieograniczonego walca o takim samym wymiarze charakterystycznym.

### **Rozwiązanie dla płyty**

Z tablic odczytujemy dla żeliwa parametry :

$$\lambda = 50 \text{ W}/(\text{m K}), \quad c = 540 \text{ J}/(\text{kg K}) \text{ oraz } \rho = 7200 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Wymiar charakterystyczny:  $X_1 = g/2 = 0,03 \text{ m}$ .

Współczynnik wyrównywania temperatury

$$a = \lambda / (c \rho) = 50 / (540 \cdot 7200) = 12,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Liczba Fouriera:

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{X_1^2} = 12,9 \cdot 10^{-6} \cdot 720 / 0,03^2 = 10,3$$

Liczba Biota:  $Bi = \alpha \cdot X_1 / \lambda = 30 \cdot 0,03 / 50 = 0,018$

Według wyznaczonych wartości kryteriów  $Fo$  i  $Bi$  odczytujemy z nomogramu ( s. 41 ) dla płaszczyzny symetrii płyty:

$$\Theta_s ( Fo = 10,3 ; Bi = 0,018 ) = 0,84 \text{ (z dokładnością ok. 0,01)}$$

.oraz dla powierzchni płyty:

$$\Theta_{\text{pow}} ( Fo = 10,3 ; Bi = 0,018 ) = 0,81 \text{ (z dokładnością ok. 0,01)}$$

Temperatura w płaszczyźnie symetrii:

$$T_s = (T_o - T_{\text{ot}}) \cdot \Theta_s + T_{\text{ot}} = (50 - 700) \cdot 0,84 + 700 = 154^{\circ}\text{C}$$

Dla powierzchni

$$T_{\text{pow}} = (T_o - T_{\text{ot}}) \cdot \Theta_{\text{pow}} + T_{\text{ot}} = (50 - 700) \cdot 0,81 + 700 = 173^{\circ}\text{C}$$

Szukana różnica temperatur wynosi:

$$\Delta T = T_{\text{pow}} - T_s = 173 - 154 = 19 \text{ K}.$$

### **A. Rozwiązanie dla nieograniczonego walca**

Dla wyznaczonych wartości kryteriów  $Fo$  i  $Bi$  odczytujemy z nomogramu dla osi walca ( s. 40 ) :

$$\Theta_{\text{os}} ( Fo = 10,3 ; Bi = 0,018 ) = 0,70 \text{ (z dokładnością ok. 0,01)}.$$

.oraz dla powierzchni walca:

$$\Theta_{\text{pow}} ( Fo = 10,3 ; Bi = 0,018 ) = 0,67 \text{ (z dokładnością ok. 0,01)}.$$

Temperatura w osi walca :

$$T_{\text{os}} = (T_o - T_{\text{ot}}) \cdot \Theta_{\text{os}} + T_{\text{ot}} = (50 - 700) \cdot 0,70 + 700 = 245^{\circ}\text{C}$$

Dla powierzchni walca :

$$T_{\text{pow}} = (T_o - T_{\text{ot}}) \cdot \theta_{\text{pow}} + T_{\text{ot}} = (50 - 700) \cdot 0,67 + 700 = 264 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Różnica temperatur dla walca wynosi:

$$\Delta T = T_{\text{pow}} - T_{\text{os}} = 264 - 245 = 19 \text{ K.}$$

.. \*\*

Literatura do tematu 16

13. B. Staniszewski : Wymiana ciepła .PWN. W-wa 1979.

14. S. Wiśniewski, T. Wiśniewski : Wymiana ciepła. WNT. W-wa 1994, s. 97 – 106.

15. W. Longa : Krzepnięcie odlewów. Wyd. Śląsk. Katowice 1985, s. 60 -78.

16. W. Longa i in.: Stygnięcie i krzepnięcie odlewów. Skr. AGH nr 623. Kraków 1978, s. 8 -14, 35 - 50).

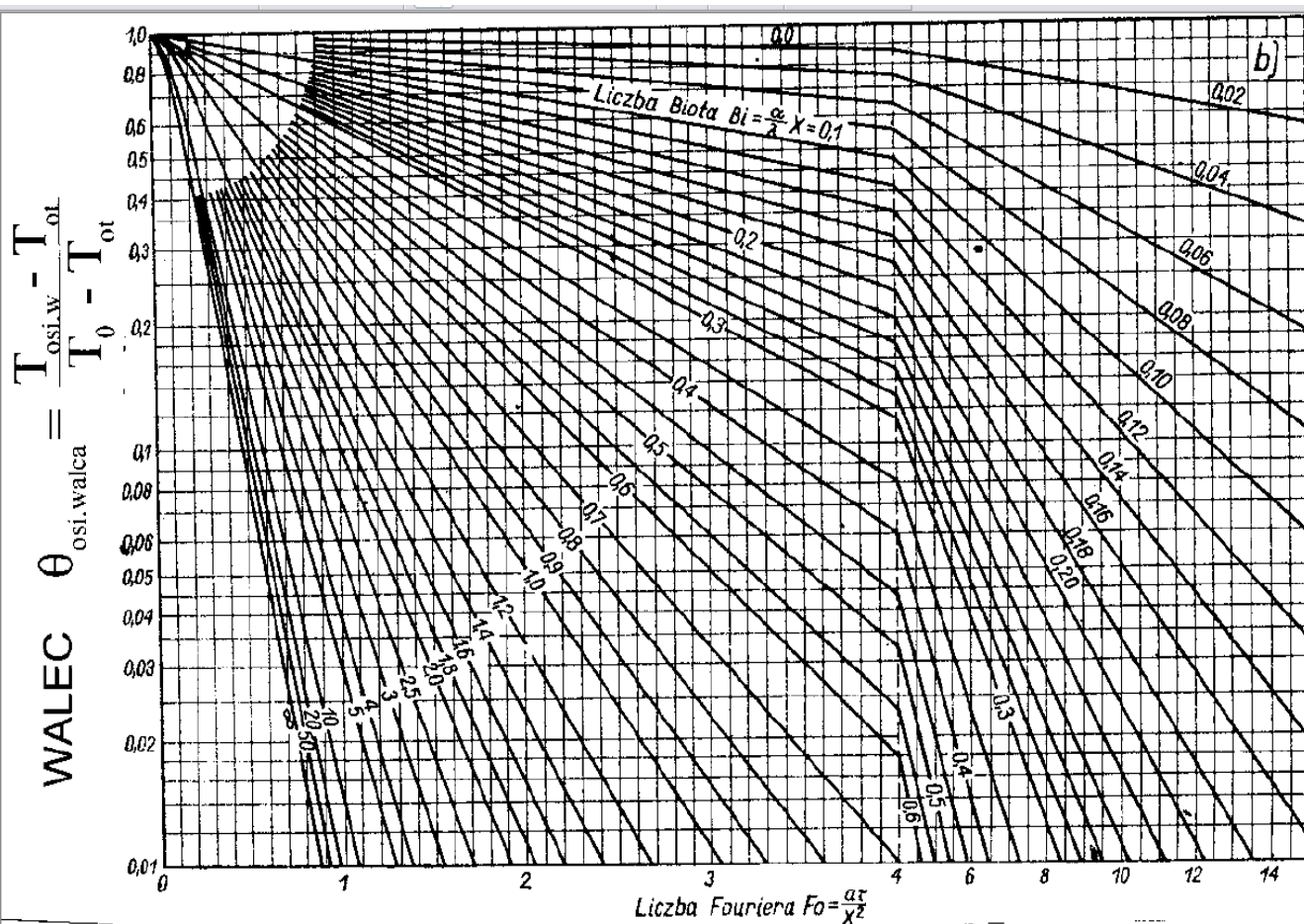
17. Materiały na stronie Katedry Inżynierii Proc. Odlewniczych, przedmiot: „ Termodynamika i technika cieplna .....” - ćwiczenia audytoryjne i laboratoryjne.

**Uwaga** : popr. .na s.8 (ALFA = 6,25)

#### 9.6. Nomogramy pola temperatury nieograniczonego walca i nieograniczonej płyty (59)

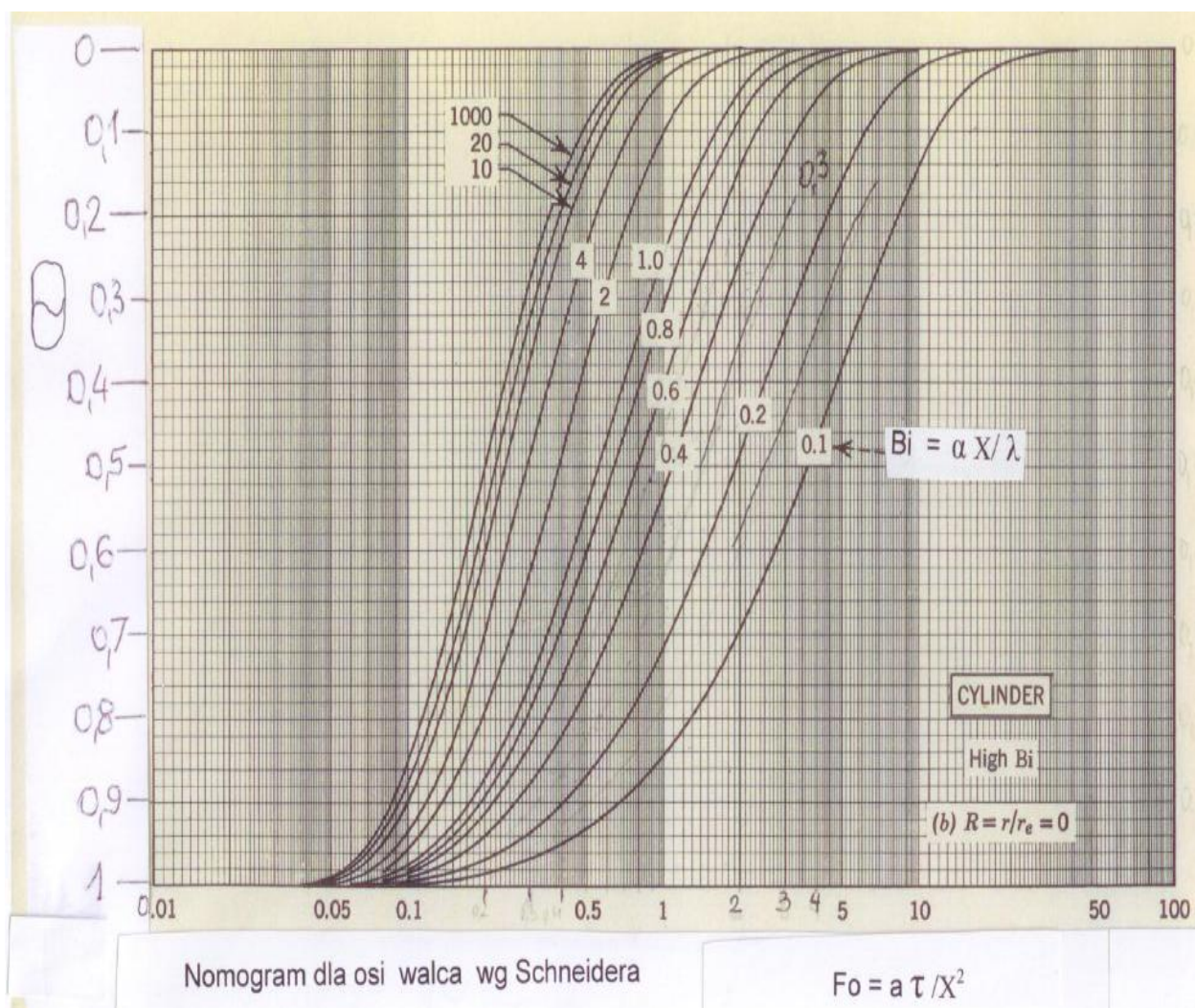
Przedstawione nomogramy opisują cztery przypadki pól temperatury

- bezwymiarową temperaturę osi walca wg [5] ( $K_x = 0$ ),
- bezwymiarową temperaturę osi walca wg Schneidera [6] ( $K_x = 0$ ),
- bezwymiarową temperaturę powierzchni walca ( $K_x = 1$ ),
- bezwymiarową temperaturę płaszczyzny symetrii płyty ( $K_x = 0$ ).
- bezwymiarową temperaturę powierzchni płyty ( $K_x = 1$ ).



s. 2. Bezwymiarowa temperatura w osi nieograniczonego walca  
( $Bi \geq 0,02$ .)

Wykres 1(a). Nomogram dla osi walca ( $K_x = x / R = 0$ )

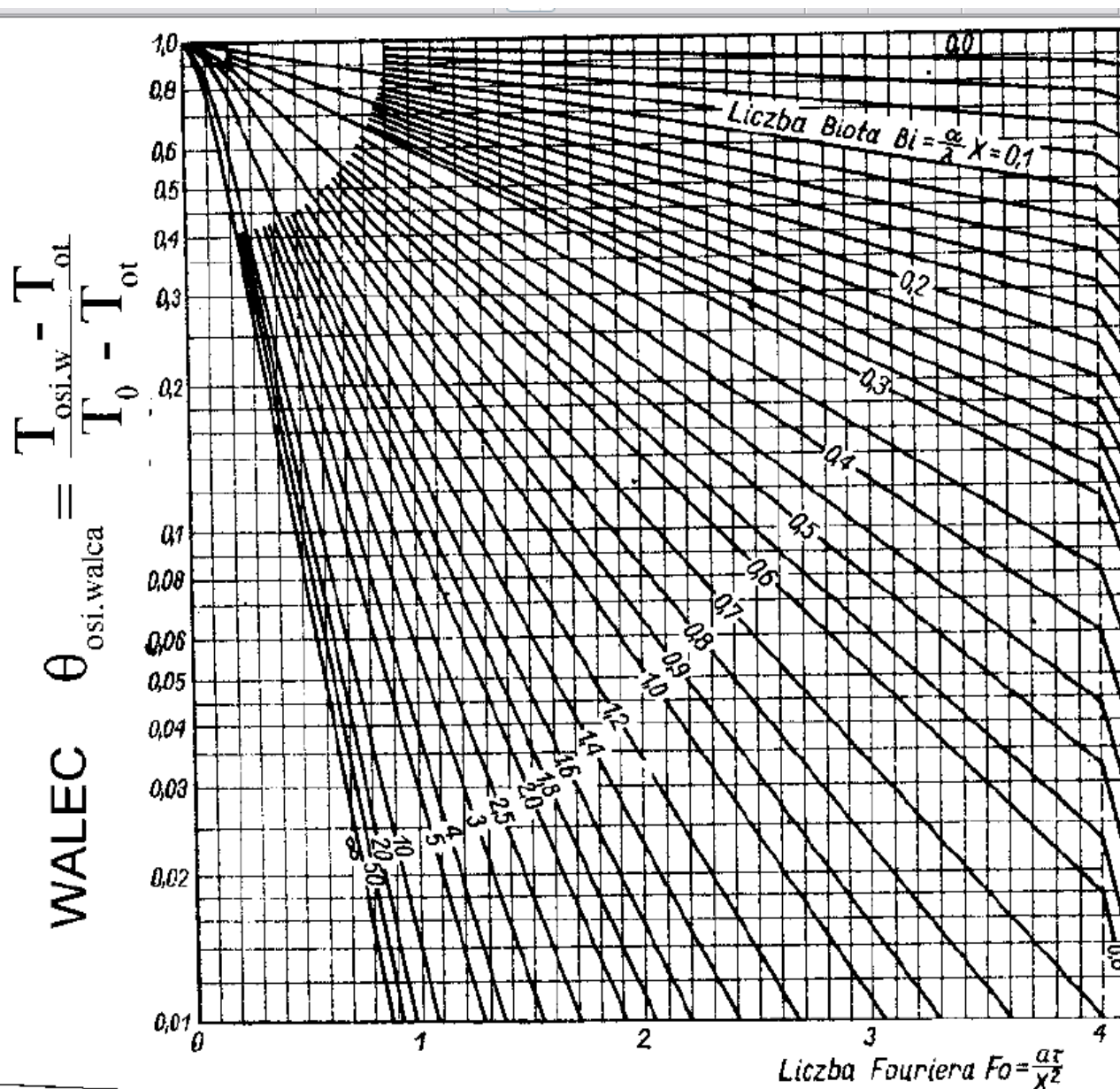


Wykres 2(b). Nomogram dla osi walca wg Schneidera [39] ( $K_x = x/X = 0$ ,  $X = R$ )

Uwaga: dla małych wartości  $Fo$  i  $Bi$  nie ma niemożliwości dokładnego odczytania  $\theta$  z nomogramu na wykresie 1(a).

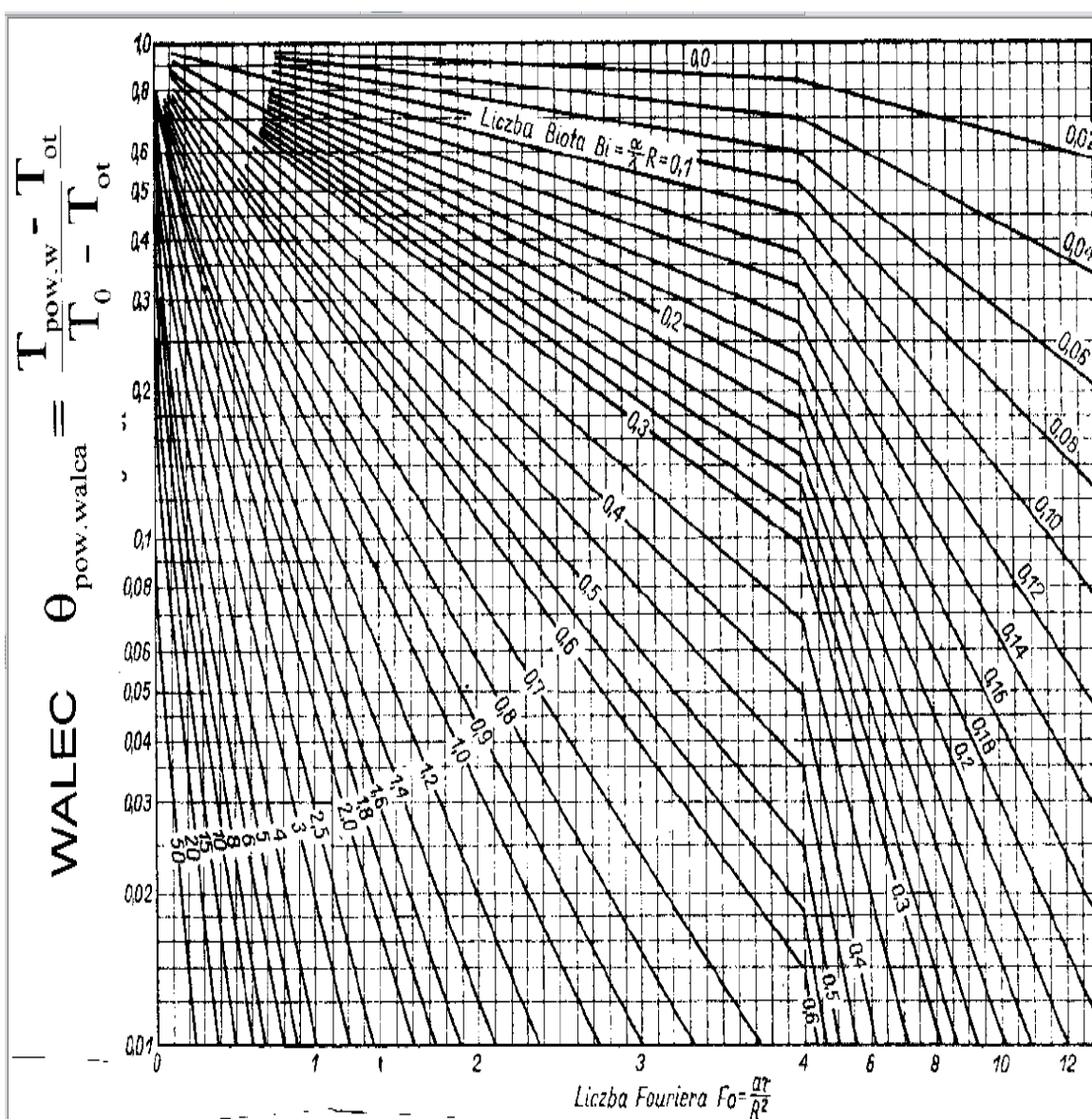
Przykłady

|          |      |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|
| $Fo$     | 0,3  | 0,5  | 1    | 2    | 5    |
| $Bi$     | 0,1  | 0,4  | 0,2  | 0,3  | 0,3  |
| $\theta$ | 0,97 | 0,76 | 0,72 | 0,33 | 0,06 |



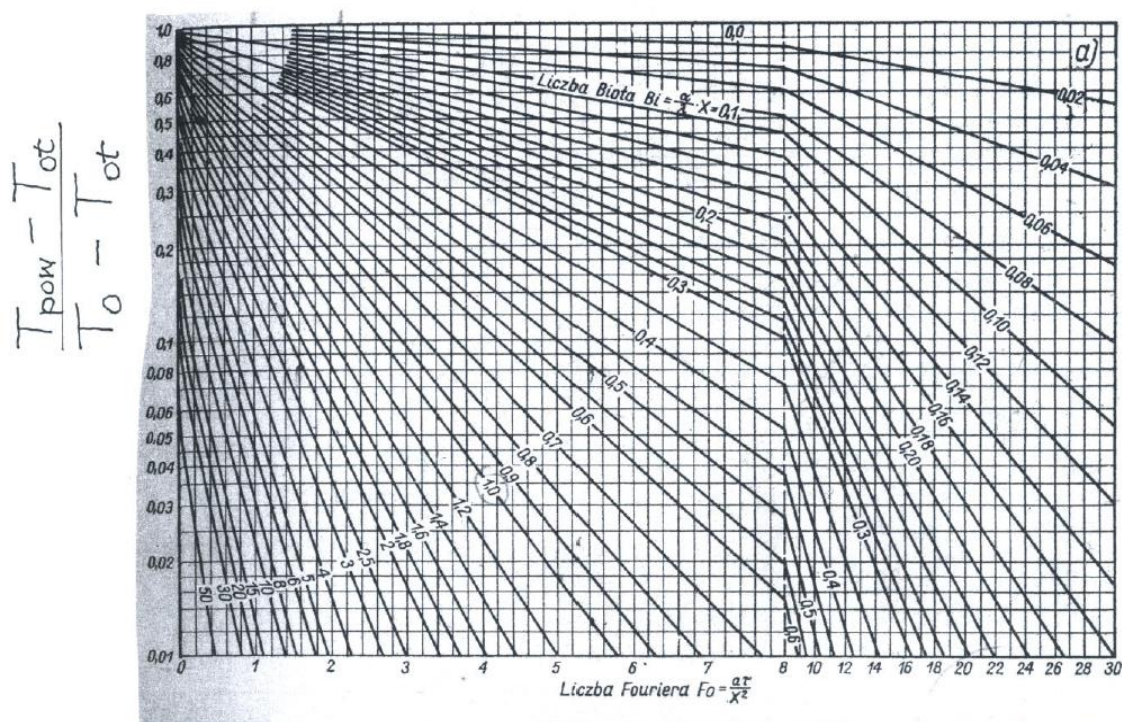
s. 2. Bezwymiarowa temperatura w osi nieograniczonej (Bi ≥ 0,02.)

Wykres 3(a). Nomogram dla osi walca - powiększony ( $K_x = x / R = 0$ )



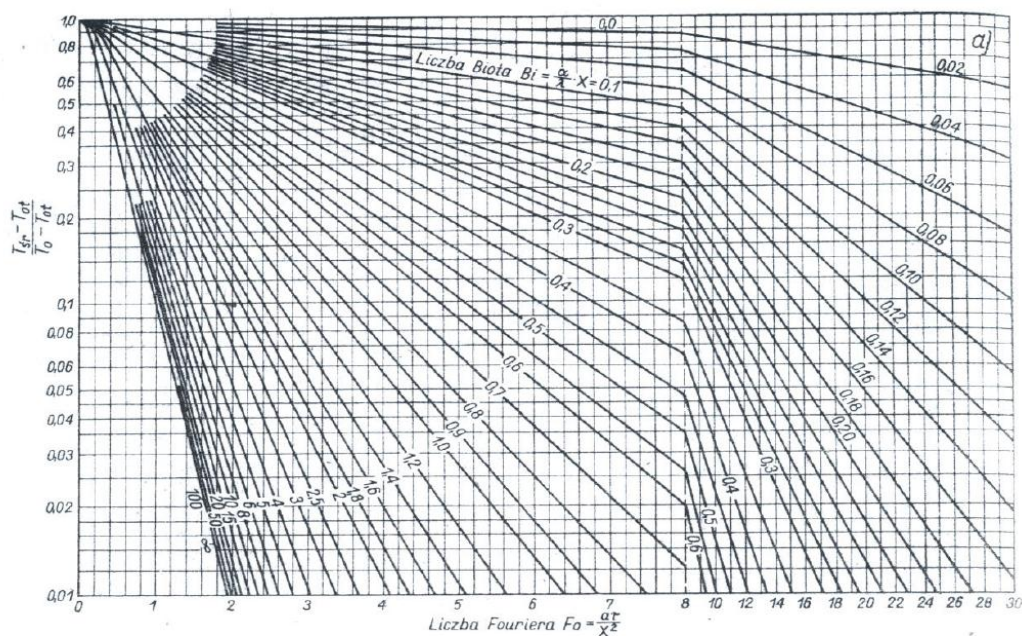
ys. 1. Bezwymiarowa temperatura na powierzchni nieograniczonego walca ( $Bi \geq 0,02$ .)

Wykres 4 (c). Nomogram dla powierzchni walca ( $K_x = x/R = 1$ )



Rys. 3. Bezwymiarowa temperatura **powierzchni nieograniczonej płyty**, warunki brzeg. 3 rodzaju,  $K_x = x/X = 1$ ,  $Bi \geq 0,02$

Wykres (d)



Rys. 4. Bezwymiarowa temperatura w **płaszczyźnie symetrii nieograniczonej płyty**, warunki brzeg. 3 rodzaju,  $K_x = x/X = 0$ ,  $Bi \geq 0,02$

### 9.7. Przykłady obliczeń nagrzewania ciał klasycznych (warunki brzegowe 3. rodzaju)

#### ZADANIE E1 (11)

W celu optymalizacji czasu krzepnięcia wężła cieplnego odlewu staliwnego zastosowano ochładzalnik wewnętrzny o średnicy ( $d_o$ ) równej 20 mm. Warunkiem poprawnego działania ochładzalnika jest zapewnienie możliwości jego dokładnego zespawania z materiałem odlewu. Temperatura zalewania metalu wynosi  $1550\text{ }^{\circ}\text{C}$  (0,5 % C) przy temperaturze likwidusu równej  $T_{lik} = 1450\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Temperatura początkowa ochładzalnika  $T_{po} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Warunki brzegowe wymiany ciepła między ochładzalnikiem i ciekłym metalem opisuje współczynnik wymiany ciepła  $\alpha_o = 900\text{ W/(m}^2\text{ K)}$ . Sprawdzić możliwość zespawania ochładzalnika z metalem odlewu, zakładając, że proces ten rozpocznie się w połowie czasu krzepnięcia odlewu. Założyć czas krzepnięcia  $\tau_3 = 2\text{ min}$ . Potrzebne dane przyjąć z tablic. Rozpatrzyć konieczność zmiany temperatury początkowej ochładzalnika  $T_{po}$ .

#### Rozwiązanie

Z tablic odczytujemy parametry ochładzalnika stalowego :

$$\lambda_o = 44\text{ W/(m K)}, \quad a_o = 13,8 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$$

Wymiar charakterystyczny:  $X_1 = d_o/2 = 0,01\text{ m}$ .

Szukamy wartości temperatury powierzchni walca dla czasu nagrzewania ( $\tau_n$ ) równego połowie czasu krzepnięcia odlewu, czyli dla  $\tau_n = \tau_3/2 = 120/2 = 60\text{ s}$ .

Obliczamy kolejno:

$$\text{a) Liczba Fouriera: } Fo = \frac{a_o \cdot \tau_n}{X_o^2} = 13,8 \cdot 10^{-6} \cdot 60 / 0,01^2$$

$$Fo = 8,28$$

$$\text{b) Liczba Biota: } Bi = \frac{\alpha_o}{\lambda_o} X_o = 900 \cdot 0,01 / 44 = 0,205$$

Za pomocą nomogramu opisującego bezwymiarowe pole temperatury powierzchni nieskończonego walca ( str. 40) dla wyznaczonych wyżej wartości  $Fo$ ,  $Bi$  odczytujemy

$$\Theta_o (Fo = 8,28; Bi = 0,205) = 0,038$$

Warunkiem zespawania ochładzalnika jest osiągnięci e przez niego temperatury powierzchni przekraczającej temperaturę likwidusu ( $1450\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).

Z definicji bezwymiarowej temperatury

$$\Theta_o = \frac{T_{pow} - T_{ot}}{T_{po} - T_{ot}} = 0,038,$$

$$\text{mamy: } T_{pow} = 0,038 \cdot (20 - 1500) + 1500 = 1443,8\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Ponieważ  $T_{lik} = 1450\text{ }^{\circ}\text{C}$ , z uzyskanej wartości temperatury  $T_{pow}$  wynika :

$$T_{pow} < T_{lik}, \quad \text{czyli}$$

warunek zespawania ochładzalnika z metalem odlewu nie został spełniony.

Rozwiązaniem jest zmniejszenie średnicy ochładzalnika np. do wartości 16 mm, co daje  $X_1 = 0,008$  m. Nowe wyniki :

$$Bi = 900 \cdot 0,008 / 44 = 0,163$$

$$Fo = 13,8 \cdot 10^{-6} \cdot 60 / 0,008^2 = 12,9$$

Z nomogramu mamy:

$$\Theta_o (Fo = 12,9 ; Bi = 0,163) = 0,017$$

Stąd:

$$T_{pow} = 0,017 \cdot (20 - 1500) + 1500 = 1474,8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Dla poprawionej średnicy ochładzalnika warunek zespawania ochładzalnika z metalem odlewu został spełniony.

## ZADANIE E2

Płyta żeliwna o grubości 60 mm posiada wymiary gabarytowe pozwalające na pominięcie ilości ciepła wymienianego przez jej powierzchnie czołowe. Warunki brzegowe procesu nagrzewania płyty określone są wartością temperatury otoczenia równej  $700 \text{ } ^\circ\text{C}$  oraz współczynnikiem wymiany ciepła równym  $\alpha = 30 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Temperatura początkowa procesu nagrzewania  $T_o = 50 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Określić różnicę temperatur (spadek) pomiędzy środkiem i powierzchnią płyty po czasie  $\tau = 12$  min. Potrzebne dane termofizyczne dla żeliwa przyjąć z tablic. Analogiczne obliczenia wykonać także dla nieograniczonego walca o takim samym wymiarze charakterystycznym.

### Rozwiązanie dla płyty

Z tablic odczytujemy dla żeliwa parametry :

$$\lambda = 50 \text{ W}/(\text{m K}) , c = 540 \text{ J}/(\text{kg K}) \text{ oraz } \rho = 7200 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Wymiar charakterystyczny:  $X_1 = g/2 = 0,03$  m.

Współczynnik wyrównywania temperatury

$$a = \lambda / (c \rho) = 50 / (540 \cdot 7200) = 12,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Liczba Fouriera:

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{X_1^2} = 12,9 \cdot 10^{-6} \cdot 720 / 0,03^2 = 10,3$$

Liczba Biota:  $Bi = \alpha \cdot X_1 / \lambda = 30 \cdot 0,03 / 50 = 0,018$

Według wyznaczonych wartości kryteriów  $Fo$  i  $Bi$  odczytujemy z nomogramu dla płaszczyzny symetrii płyty:

$$\Theta_s (Fo = 10,3 ; Bi = 0,018) = 0,84 \text{ (z dokładnością ok. 0,01)}$$

.oraz dla powierzchni płyty:

$$\Theta_{pow} (Fo = 10,3 ; Bi = 0,018) = 0,81 \text{ (z dokładnością ok. 0,01)}$$

Temperatura w płaszczyźnie symetrii:

$$T_s = (T_o - T_{ot}) \cdot \Theta_s + T_{ot} = (50 - 700) \cdot 0,84 + 700 = 154 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Dla powierzchni

$$T_{pow} = (T_o - T_{ot}) \cdot \Theta_{pow} + T_{ot} = (50 - 700) \cdot 0,81 + 700 = 173 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Szukana różnica temperatur wynosi:

$$\Delta T = T_{pow} - T_s = 173 - 154 = 19 \text{ K.}$$

**B. Rozwiązanie dla nieograniczonego walca**

Dla wyznaczonych wartości kryteriów  $Fo$  i  $Bi$  odczytujemy z nomogramu dla osi walca :

$$\Theta_{os} (Fo = 10,3 ; Bi = 0,018) = 0,70 \text{ (z dokładnością ok. } 0,01).$$

.oraz dla powierzchni walca:

$$\Theta_{pow} (Fo = 10,3 ; Bi = 0,018) = 0,67 \text{ (z dokładnością ok. } 0,01).$$

Temperatura w osi walca :

$$T_{os} = (T_o - T_{ot}) \cdot \Theta_{os} + T_{ot} = (50 - 700) \cdot 0,70 + 700 = 245 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Dla powierzchni walca :

$$T_{pow} = (T_o - T_{ot}) \cdot \Theta_{pow} + T_{ot} = (50 - 700) \cdot 0,67 + 700 = 264 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Różnica temperatur dla walca wynosi:

$$\Delta T = T_{pow} - T_{os} = 264 - 245 = 19 \text{ K.}$$

**10. Wymiana ciepła przy konwekcji swobodnej w nieograniczonej przestrzeni - 33****10.1. Wprowadzenie teoretyczne**

Podstawowym parametrem opisującym przebieg procesu konwekcji jest współczynnik wymiany (przejmowania) ciepła. Żmudne i skomplikowane badania pozwoliły na uzyskanie ogólnego równania kryterialnego o postaci:

$$Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^n \quad (a1)$$

.gdzie:

$$Nu = \alpha \cdot \frac{d_e}{\lambda_m} \quad - \text{ kryterium Nusselta,}$$

$$Gr = \beta_m \nu_m^{-2} g d_e^3 \Delta T \quad - \text{ kryterium Grashofa,}$$

$$Pr = \frac{\nu_m}{a_m} \quad - \text{ kryterium Prandtl'a,}$$

$a_m$  – współczynnik wyrównywania temperatury medium,  $[m^2/s]$ ,

$\alpha$  – współczynnik wymiany (przejmowania) ciepła,

$\beta_m$  – współczynnik rozszerzalności objętościowej płynu,  $[K^{-1}]$ ,

$d_e$  – charakterystyczny (ekwiwalentny) wymiar liniowy ciała,  $[m]$ ,

$\nu_m$  – lepkość kinematyczna medium,  $[m^2/s]$ ,

$C, n$  – stałe (współczynniki) uwzględniające zróżnicowane rodzaje ruchu ciepła na drodze konwekcji, podane w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości stałych wg badań Michiejewa

| $Gr \cdot Pr$ | $10^{-3}$ do $5 \cdot 10^2$ | $5 \cdot 10^2$ do $2 \cdot 10^7$ | $2 \cdot 10^7$ do $10^{13}$ |
|---------------|-----------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| $C$           | 1,18                        | 0,54                             | 0,135                       |
| $n$           | 1/8                         | 1/4                              | 1/3                         |
| Przypadek     | A                           | B                                | C                           |

Przy pewnym stopniu uproszczenia, wyróżnić można trzy następujące przypadki konwekcyjnej wymiany ciepła [ Michiejew, Staniszewski s. 304] :

- A. pionowe druty i rury, poziome druty,
  - B. pionowe i poziome druty, kule,
  - C. pionowe druty i rury, pionowe ścianki, kule.
- ( poprawiono 8-06-2010)

W przypadku ścian pionowych wymiarem charakterystycznym jest wymiar wysokości.

Literatura do zagadnień 9, 10

1. B. Staniszewski : Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne. PWN. W-wa 1979 , s. 304
2. S. Wiśniewski, T. Wiśniewski : Wymiana ciepła. WNT. W-wa 1994, s. 278.
3. Witryna Katedry: [www.kipo.agh.edu.pl](http://www.kipo.agh.edu.pl)

## 10.2. Przykład obliczeniowy (zadanie F1)

Określić współczynnik przejmowania ciepła w warunkach konwekcji swobodnej na powierzchni zewnętrznej tradycyjnego żeliwiaka o średnicy zewnętrznej równej 1200 mm i wysokości strefy chłodzenia równej 2000 mm ( $d_e$ ). Założyć średnią temperaturę zewnętrzną powierzchni płaszcza żeliwiaka równą  $T_z = 60^\circ\text{C}$  oraz temperaturę otoczenia  $T_{ot} = 20^\circ\text{C}$ . Potrzebne dane przyjąć z tablic dla średniej temperatury warstwy przyściennej  $T_{sr}$ .

Wymiar charakterystyczny  $d_e = 2 \text{ m}$  ,  
 $\Delta T = T_z - T_{ot} = 60 - 20 = 40 \text{ K}$ .

Średnia temperatura  $T_{sr} = 0,5 ( 20 + 60 ) = 40^\circ\text{C}$ .

Dla tej temperatury mamy:

- a) lepkość  $\nu_m = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ ,
- b) współczynnik przewodzenia  $\lambda_m = 0,028 \text{ W/ (m K)}$ ,
- c) liczba Prandtla  $Pr = 0,72$
- d) współczynnik rozszerzalności (dla gazów wynosi  $\beta = 1/ T_{sr}$  )

$$\beta = \frac{1}{(273 + 40)} = 1/313 = 0,0032 \text{ K}^{-1}$$

Liczba Grashofa

$$Gr = \beta_m \nu_m^{-2} g d_e^3 \Delta T$$

$$Gr = 0,0032 / (18 \cdot 18 \cdot 10^{-12}) \cdot 9,81 \cdot 2^3 \cdot 40$$

$$Gr = 3,55 \cdot 10^{10} ,$$

$$Gr \cdot Pr = 3,55 \cdot 0,72 \cdot 10^{10} = 2,56 \cdot 10^{10} , C = 0,135 ; n = 1/3$$

$$Nu = \alpha / \lambda_m \cdot d_e = 0,135 (2,56 \cdot 10^{10})^{0,333} = 398$$

Szukany współczynnik wymiany (przejmowania) ciepła :

$$\alpha = 398 / 2 \cdot 0,028 = 5,57 \text{ W/ (m}^2 \text{ K)}$$

(3.01.2010/ 14.01.2010/ 30. 01.2011)

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

**11. Typowe przypadki wymiany ciepła przez promieniowanie – 29 (uzupełnić)**

(Temat nr 20A)

**11. 1. Wprowadzenie teoretyczne**

Rozpatrzmy typowy przypadek wymiany ciepła między powierzchniami, z których jedna zamyka w sobie drugą.

Zgodnie z prawem Stefana- Boltzmanna wartość strumienia cieplnego emitowanego przez powierzchnię o temperaturze  $T$  wynosi

$$q = \varepsilon \sigma T^4 \quad [W/m^2]$$

gdzie:  $\varepsilon$  - emisyjność (zdolność promieniowania),

$\sigma$  - stała promieniowania ciała doskonale czarnego,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$

$T$  – temperatura bezwzględna [K].

Dla przypadku wymiany ciepła między powierzchniami (o emisyjnościach  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ), z których jedna zamyka w sobie drugą obowiązuje zależność:

$$q = \varepsilon_{ef} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [W/m^2]$$

gdzie:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$$

$F_1, F_2$  - pola powierzchni promieniujących dla obu ciał.

W przypadku powierzchni zorientowanych równolegle otrzymujemy  $F_1 = F_2$ .

W tabeli 1 podano wartości emisyjności  $\varepsilon$  niektórych ciał [ 1 ]

| L p | Materiał                          | Temperatura, °C | $\varepsilon$ |
|-----|-----------------------------------|-----------------|---------------|
| 1   | Chrom                             | 100 – 1000      | 0,08 – 0,26   |
| 2   | Miedź polerowana                  | 80 – 115        | 0,012 – 0,023 |
| 3   | Miedź utleniona                   | 200 – 600       | 0,57 – 0,87   |
| 4   | Stal węglowa utleniona            | 200 – 600       | 0,8           |
| 5   | Stal nierdzewna                   | 480 – 800       | 0,22 – 0,58   |
| 6   | Żelazo utlenione                  | 100             | 0,736         |
| 7   | Żeliwo toczzone                   | 830 – 990       | 0,60 – 0,70   |
| 8   | cegła czerwona                    | 20              | 0,92          |
| 9   | cegła ogniotrwała                 | -               | 0,80 - 0,90   |
| 10  | cegła szamotowa                   | 1100            | 0,75          |
| 11  | drewno                            | 20              | 0,895         |
| 12  | farba aluminiowa                  | 150 - 315       | 0,35          |
| 13  | gips                              | 20              | 0,903         |
| 14  | kwarc                             | 20              | 0,932         |
| 15  | marmur szary                      | 22              | 0,931         |
| 16  | papier cienki na płycie metalowej | 19              | 0,924         |
| 17  | porcelana                         | 22              | 0,924         |
| 18  | sadza                             | 40 – 370        | 0,95          |
| 19  | szkło                             | 22              | 0,937         |

|    |             |         |              |
|----|-------------|---------|--------------|
| 20 | woda        | 0 - 100 | 0,95 – 0,963 |
| 21 | wolfram nić | 3300    | 0,39         |

## 11.2. Przykłady obliczeniowe

### ZADANIE G1 (2. 03. 2011.)

W kanale o przekroju kołowym wykonanym z czerwonej cegły o emisyjności równej  $\varepsilon_c = 0,92$  przebiega osiowo stalowa rura o emisyjności powierzchni  $\varepsilon_r = 0,64$ . Kanał ma średnicę wewnętrzną  $d_k = 900$  mm i temperaturę powierzchni  $T_k = 350$  K. Rura ma średnicę zewnętrzną  $d_r = 300$  mm i temperaturę powierzchni  $T_r = 700$  K. Wyznaczyć :

- strumień cieplny  $q_{12}$  oddawany przez promieniowanie
- moc cieplną procesu promieniowania dla powierzchni rury o długości  $L = 5$  m.
- współczynnik wymiany ciepła przez promieniowanie  $\alpha_{pr}$

Efektywna emisyjność :

$$\varepsilon_{ef} = \frac{1}{\frac{1}{0,64} + \frac{F_r}{F_k} \left( \frac{1}{0,92} - 1 \right)}$$

$$F_r / F_k = d_r / d_k = 0,3 / 0,9 = 0,333$$

$$\varepsilon_{ef} = 0,63$$

a) Strumień cieplny

$$q_{12} = \varepsilon_{ef} \sigma_0 (T_r^4 - T_k^4), \quad \sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{ K}^4)$$

$$q_{12} = \varepsilon_{ef} \sigma_0 (T_r^4 - T_k^4) = 0,63 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (700^4 - 350^4) = 8038 \text{ W/m}^2$$

b) Moc cieplna  $Q^*$  (ciepło w odniesieniu do czasu :  $Q^* = dQ/d\tau$ )

$$F_1 = 3,14 \cdot 0,3 \cdot 5 = 4,71 \text{ m}^2.$$

$$Q^* = \Delta Q / \Delta \tau = F_1 q_{12} = 4,71 \cdot 8038$$

$$Q^* = 37\,860 \text{ W} = 37,9 \text{ kW}.$$

c) Współczynnik wymiany ciepła przez promieniowanie  $\alpha_{pr}$

$$\alpha_{pr} = \frac{q_{12}}{T_r - T_k} = 8038 / (700 - 350) = 22,9 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}.$$

==

Nx-J Zadanie wytypowane jako praca kontrolna 2010 /2011 dla stud. niestacjonarnych 2R Grupa Kraków. ( $\alpha_{pr}$ ) .

**ZADANIE G2**

Obliczyć ciepło oddane wskutek promieniowania przez rurę stalową o średnicy  $d = 600$  mm i długości  $5$  m, przeprowadzoną przez halę o bardzo dużej kubaturze. Temperatura powierzchni zewnętrznej rury wynosi  $350$  °C. Temperaturę ściany hali można przyjąć równą  $20$  °C. O ile wzrośnie ilość oddanego ciepła, jeżeli zwiększymy średnicę rury o  $20$  %?

**Dane:**

$$\varepsilon_1 = 0.8;$$

stała promieniowania  $C_0 = 5.67$  W/(m<sup>2</sup> · K).

Promieniowanie - koniec.

Zad. G2 - praca kontrolna dla stud. Zaoczných Gr. Kraków (2009)

**ZADANIE G3** (rzeczywisty piec przemysłowy Zad. 26 , 2012)

Ścianka pieca przemysłowego składa się z warstwy dobrego materiału izolacyjnego i stalowego płaszcza o grubości  $X_{ps} = 3$  mm. Do analizy procesu cieplnego założymy następujące warunki jednoznaczności:

- w środku pieca wymiana ciepła zachodzi przy ustalonym warunku brzegowym 1. rodzaju, przy temperaturze powierzchni wewnętrznej  $T_{1pow} = 400$  do  $780$  °C,
- temperaturowa zmienność współczynnika przewodzenia ciepła warstwy izolacyjnej może być zastąpiona wartością średnią odniesioną do temperatury  $450$  °C,
- zewnętrzna powierzchnia pieca oddaje ciepło na drodze konwekcji swobodnej i promieniowania cieplnego, przy współczynniku emisyjności  $\varepsilon = 0,5$  do  $0,9$ ,
- charakterystyczny wymiar układu równy wysokości pieca ( pionowy wymiar pieca) wynosi  $d_e = H = 1100$  mm,
- temperatura otoczenia wynosi  $T_{ot} = 20$  °C.

Założyć współczynnik przewodzenia ciepła dla stali węglowej  $\lambda_{ps} = 57$  W/ (m K). [ patrz (3), dla  $100$ °C - s. 243 ].

Do obliczeń przyjąć następujące parametry (płyta **Ceraboard 115**) materiału izolacyjnego:

- gęstość  $\rho_i = 300$  kg/ m<sup>3</sup> ,
- średni współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda_{iz} = 0,11$  W/ (m K).

Określić minimalną grubość warstwy izolacyjnej zapewniającą uzyskanie temperatury na powierzchni zewnętrznej pieca mniejszą niż:  $T_{2pow} < T_{max}$  , przy  $T_{max} = 30$  do  $75$  °C.

**A. wyznaczenie składowej współczynnika wymiany ciepła na drodze konwekcji swobodnej.**

Spierzenie temperatury (różnica) na zewnętrznej powierzchni układu :

$$\Delta T = T_{2pow} - T_{ot} = 80 - 20 = 60 \text{ K}$$

Umowna, średnia temperatura w otoczeniu:

$$T_{sr} = 0,5 ( 20 + 80 ) = 50 \text{ °C.}$$

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

Dla tej temperatury mamy właściwości powietrza:

e) lepkość  $\nu_m = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,

f) współczynnik przewodzenia  $\lambda_m = 0,0283 \text{ W/(m K)}$ ,

g) liczba Prandtla  $Pr = 0,698$

h) współczynnik rozszerzalności (dla gazów wynosi  $\beta = 1/T_{sr}$ )

$$\beta = \frac{1}{(273 + 50)} = 1/323 = 0,0031 \text{ K}^{-1}$$

Wymiar charakterystyczny  $d_e = 1,1 \text{ m}$

Liczba Grashofa

$$Gr = \beta_m \nu_m^{-2} g d_e^3 \Delta T$$

$$Gr = 0,0031 / (18 \cdot 18 \cdot 10^{-12}) \cdot 9,81 \cdot 1,1^3 \cdot 60 = 7,18 \cdot 10^9$$

$$Gr \cdot Pr = 7,18 \cdot 0,698 \cdot 10^9 = 5,01 \cdot 10^9$$

Z wartości iloczynu  $Gr \cdot Pr$  (tabela 2) wynika:  $C = 0,135$  ;  $n = 1/3$

$$Nu = C (Gr \cdot Pr)^n$$

$$Nu = 0,135 (5,01 \cdot 10^9)^{0,333} = 231$$

$$Nu = \alpha_k / \lambda_m \cdot d_e = 231$$

Szukany współczynnik wymiany przez konwekcję wynosi

$$\alpha_k = 231 \cdot 0,0283 / 1,1 = 5,94 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

**B. wyznaczenie składowej współczynnika wymiany ciepła na drodze promieniowania.**

Z danych literaturowych przyjmujemy współczynnik emisji dla powierzchni płyty stalowej utlenionej równy  $\epsilon_s = 0,7$

Dzięki zależności opisującej strumień ciepły dla promieniowania

$$q_{pr} = \epsilon_s \sigma_0 (T_{2pow}^4 - T_{ot}^4), \text{ gdzie: } \sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{ K}^4),$$

Strumień ciepły w ujęciu zgodnym z równaniem Newtona:

$$q_{pr} = \alpha (T_{2pow} - T_{ot}), \text{ otrzymujemy:}$$

$$\alpha_{pr} = \frac{q_{pr}}{T_{2pow} - T_{ot}}$$

$$\alpha_{pr} = \epsilon_s \sigma_0 (T_{2pow}^4 - T_{ot}^4) / (T_{2pow} - T_{ot})$$

czyli

$$\alpha_{pr} = 0,7 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (353^4 - 293^4) / (80 - 20)$$

$$\alpha_{pr} = 6,17 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

**C. wyznaczenie efektywnej wartości współczynnika wymiany ciepła**

Jest ona sumą wartości składowych :

$$\alpha_{ef} = \alpha_k + \alpha_{pr} = 5,94 + 6,17 = 12,1 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

--

**D. obliczenie wartości strumienia ciepłego i oporu ciepłego warstwy izolacyjnej**

Zgodnie z prawem Newtona:

$$q = q_k + q_{pr} = \alpha_{ef} (T_{2pow} - T_{ot}) = 12,1 \cdot (80 - 20) = 726 \text{ W/m}^2$$

Opór cieplny warstwy izolacyjnej  $S_i$  (stosunek grubości do współczynnika przewodzenia) występuje w zależności

$$q = (T_{1\text{pow}} - T_{2\text{pow}}) / (S_i + S_p) = (800 - 80) / (X_i / \lambda_i + X_{ps} / \lambda_{ps}) = 726 \text{ W/m}^2$$

$$\text{Ponieważ } S_p = X_{ps} / \lambda_{ps} = 0,003 / 57 = 0,0000526 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

$$S_i = X_i / \lambda_i = (800 - 80) / 726 - 0,0000526 = 0,992 - 0,0000526 = 0,992 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

Wynika stąd grubość materiału izolacyjnego :

$$X_i = S_i \lambda_i = 0,992 \cdot 0,11 = 0,109 \text{ m} = 109 \text{ mm.}$$

**Wyniki obliczeń dla podobnych danych przedstawiono w tabeli 1**

|                                                |       |       |        |        |
|------------------------------------------------|-------|-------|--------|--------|
| Lambda izolacji W/mK                           | 0,11  | 0,11  | 0,09   | 0,09   |
| Epsilon                                        | 0,7   | 0,8   | 0,7    | 0,8    |
| Ciepło tracone do otoczenia, W/ m <sup>2</sup> | 683   | 729   | 683    | 729    |
| Grub. Izolacji [m]                             | 0,116 | 0,109 | 0,0949 | 0,0889 |

W tabeli 1 podano wybrane wartości współczynnika emisji

**Tabela 1. Wartości współczynnika emisji  $\varepsilon$  niektórych ciał [ 1, 3 ]**

| L p | Materiał               | Temperatura, °C | $\varepsilon$ |
|-----|------------------------|-----------------|---------------|
| 1   | Chrom                  | 100 – 1000      | 0,08 – 0,26   |
| 2   | Miedź polerowana       | 80 – 115        | 0,012 – 0,023 |
| 3   | Miedź utleniona        | 200 – 600       | 0,57 – 0,87   |
| 4   | Stal węglowa utleniona | 200 – 600       | 0,7 – 0,8     |
| 5   | Stal nierdzewna        | 480 – 800       | 0,22 – 0,58   |
| 6   | Żelazo utlenione       | 100             | 0,736         |
| 7   | Żeliwo toczzone        | 830 – 990       | 0,60 – 0,70   |

## **12. Wybrane zagadnienia przepływu płynów w kanałach** (Labor. nr 3 # 4. 04.2012)

### **12. 1. Wprowadzenie teoretyczne**

**Przepływem** nazywamy postępujące przemieszczanie się cieczy, gazów lub par w rurociągach, kanałach, dyszach, przewężeniach oraz innych elementach przewodu.

**Płynem** nazywamy ciecz, gaz oraz ich mieszaninę (parę).

**Płyn doskonały** to taki, który spełnia dwa warunki:

- a) jest nieściśliwy, czyli nie zmienia swojej gęstości (bliższe temu warunkowi są ciecze),
- b) jest nielepki, czyli zależne od lepkości siły tarcia, występujące w warstwach o różnych prędkościach są pomijalnie małe.

Płyny nie spełniające powyższych warunków są **płynami rzeczywistymi**.

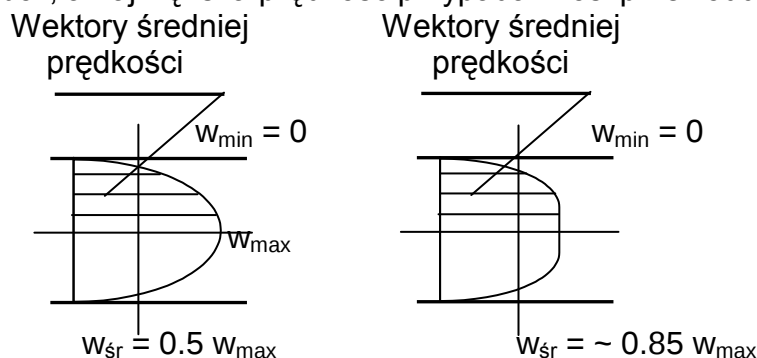
**Przepływ ustalony** (stacjonarny) występuje wówczas, jeżeli prędkość, ciśnienie i inne właściwości płynu, w dowolnym punkcie przestrzeni (strugi) nie zmieniają się z upływem czasu. (występuje tu analogia do ustalonego pola temperatury).

Przykładem przepływu ustalonego jest – przebiegający przy stałej różnicy ciśnień - wypływ wody z otworu zbiornika, w którym jej górny poziom nie ulega zmianie.

W przewodzie całkowicie wypełnionym przepływającym czynnikiem (np. o przekroju kołowym) wyróżnia się trzy rodzaje przepływów:

- a) **laminarny** (uwarstwiony, warstwowy),
- b) **przejściowy** (mieszany),
- b) **turbulentny** (burzliwy).

W pierwszym przypadku strugi czynnika przepływającego układają się równoległe do osi przewodu, przy czym w przekroju wzdłużnym rozkład prędkości ma w przybliżeniu kształt paraboli, a największa prędkość przypada w osi przewodu.



Ruch laminarny

Ruch burzliwy

Rys. 1. Schematyczne porównanie przepływu uwarstwowionego i burzliwego (tzw. profile prędkości)

W drugim przypadku cząstki czynnika nie przesuwają się równoległe do przodu, lecz mieszają się i wirują w różnych kierunkach, tworząc rodzaj linii śrubowej. Rozkład prędkości przedstawia krzywą spłaszczoną, przy czym w środkowej części, przewodu prędkość pozostaje ta sama, a od pewnego miejsca zmniejsza się znacznie aż do zera przy ścianie przewodu (rys. 1). Również przy przepływie burzliwym ruch czynnika można określić jako prostoliniowy, gdy za prędkość strumienia przyjmuje się średnią prędkość przepływu. Rysunek 1 podaje dwa przykłady ruchu burzliwego, które pokazują charakter spłaszczonej krzywej rozkładu prędkości.

Do określenia charakteru przepływu przyjęto kryterium, opracowane (ok. 1890 r.) przez znanego badacza tych procesów Osborne Reynoldsa, zwane liczbą Reynoldsa i definiowane:

$$Re = \frac{w_{sr} \cdot D}{\nu_p}$$

.gdzie:  $w_{sr}$  - średnia liniowa prędkość przepływu płynu w kanale [m/ s],

$D$  – średnica kanału cylindrycznego lub - dla przekrojów niekołowych - wymiar ekwiwalentny, czyli tzw. średnica hydrauliczna,

$\nu_p$  – lepkość kinematyczna płynu [m<sup>2</sup>/ s].

Podstawą klasyfikacji są dwie wartości krytyczne tej liczby tj.:  $Re_{kr1} = 2320$  i  $Re_{kr1} = 50000$ , zwane dolną i górną wartością krytyczną. Przepływ laminarny występuje przy  $Re < Re_{kr1}$ , mieszany przy  $Re_{kr1} < Re < Re_{kr2}$  oraz turbulentny przy  $Re > Re_{kr2}$ .

## 12. 2. Rodzaje ciśnień opisujących proces przepływu w kanale

Jednym z głównych parametrów termodynamicznych płynu jest ciśnienie statyczne.

**Ciśnieniem statycznym  $p_s$**  nazywamy:

- ciśnienie płynu pozostającego w spoczynku (np. ciśnienie w butli z gazem),
- takie ciśnienie płynu przepływającego, którego sposób pomiaru uniezależnia jego wartość od prędkości przepływu, np. ciśnienie mierzone przyrządem (manometrem) poruszającym się wraz z płynem w tym samym kierunku i z tą samą prędkością.

Jeżeli wewnątrz poruszającego się płynu ustawimy prostopadle do wektora prędkości małą przegrodę (płytkę) to ciśnienie w miejscu zahamowania przepływu (powierzchnia kontaktu płynu z płytką) jest tzw. **ciśnieniem całkowitym  $p_c$** . Przyrost ciśnienia na powierzchni przegrody - czyli różnica ciśnienia całkowitego i statycznego - nazywany jest **ciśnieniem dynamicznym  $p_d$** . Przy pomiarze ciśnienia całkowitego rurką Pitota, zahamowanie przepływu płynu wystąpi w obszarze manometru, np. w przypadku gazu na powierzchni cieczy manometrycznej.

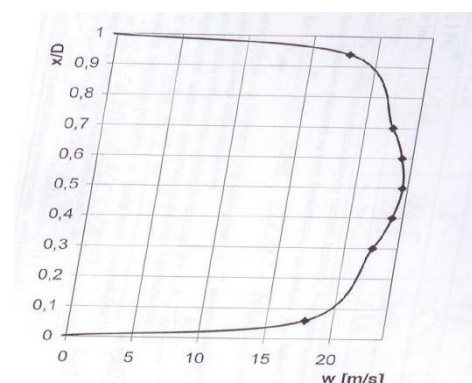
Z równania Bernoulliego - przekształconego dla przepływów w kanałach poziomych - wynika następująca definicja ciśnienia dynamicznego:

$$p_d = \frac{1}{2} \rho w^2 \quad [\text{Pa}] \quad (13-2)$$

- gdzie :  $w$  – liniowa prędkość przepływu,
- $\rho$  – gęstość czynnika ( $\rho = 1/\nu$ ),  $\text{kg/m}^3$ .

Pomiar rozkładu ciśnienia dynamicznego ( $p_d = p_c - p_s$ ) pozwala wykorzystać równanie (13-2) do wyznaczenia tzw. profilu prędkości liniowej w kanale.

Poniżej przedstawiono **profil prędkości gazu**, opisujący przepływ turbulentny w kanale cylindrycznym, uzyskany w ramach ćwiczeń laboratoryjnych dla kanału o średnicy  $D = 45 \text{ mm}$ . Ułamek  $x/D$  określa bezwymiarową współrzędną punktu w odniesieniu do powierzchni wewnętrznej kanału ( $0 < x/D < 1$ ), czyli jego wartość dla osi kanału przyjmuje 0,5.

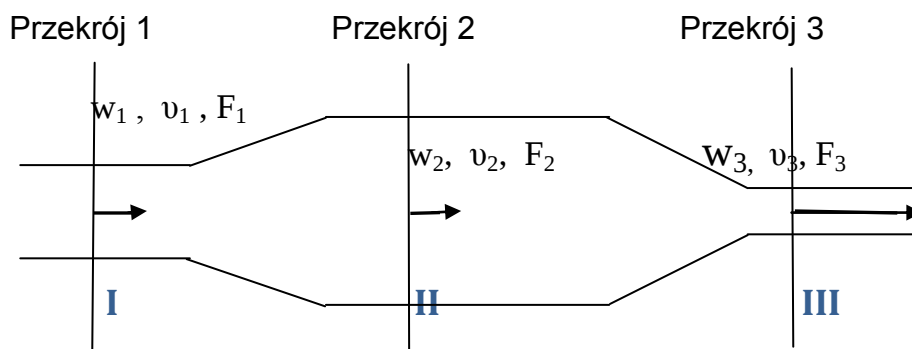


## 12. 3. Natężenie przepływu gazu w rurociągu

(19.01.2010)

Zagadnienie ciągłości przepływu można rozpatrywać jako odmianę prawa zachowania masy. Rozpatrzmy go na przykładzie długiego odcinka przewodu o zmiennych przekrojach. Zakładamy, że do każdego przekroju dopływa i odpływa ta sama masa płynu (cieczy lub gazu) w odniesieniu do jednostki czasu. Wszystkie przekroje są wypełnione czynnikiem, czyli nie powstają żadne puste miejsca (rys. 1). Poprawna analiza zagadnienia musi przewidzieć

możliwość zmienności gęstości  $[\rho]$  i objętości właściwej  $[\nu]$  płynu w różnych przekrojach kanału.



Rys. A. Przepływ płynu ściśliwego w przewodzie o zmiennym przekroju (zmienne  $\nu$ )

Do obliczenia masowego natężenia przepływu, jednakowego dla przekrojów I, II i III (rys. A), niezbędne są dane:

$F$  - lokalna powierzchnia przekroju przewodu,  $m^2$ ,

$p$  - ciśnienie bezwzględne, Pa ( $N/m^2$ ),

$g$  - przyspieszenie ziemskie,  $9.81 m/s^2$ ,

$w$  - średnia prędkość przepływu w rozważanym przekroju,  $m/s$ ,

$\nu$  - objętość właściwa przepływającego czynnika,  $m^3/kg$ ,

$\rho$  - gęstość czynnika ( $\rho = 1/\nu$ ),  $kg/m^3$ , (uwaga: literę „ $\rho$ ” studenci mylą z „ $p$ ” !!)

Podstawowa zależność (równanie ciągłości) może być zapisana dwoma sposobami :

$$\dot{m} = \frac{F_1 \cdot w_1}{\nu_1} = \frac{F_2 \cdot w_2}{\nu_2} = \frac{F_3 \cdot w_3}{\nu_3} = \text{const} [kg/s] \quad \text{lub} \quad F w \rho = \text{const}$$

Wyraża ona ogólne (pełne) ujęcie rozpatrywanego zadania. Dla przypadku stałej wartości gęstości płynu uzyskujemy szczególny przypadek w równania ciągłości w postaci:

$$F_1 w_1 = F_2 w_2 = \text{const} [m^3/s]$$

## 12.4. Przykłady obliczeniowe (32)

### ZADANIE H1 (zadanie z kolokwium 19 stycznia 2010)

Rozpatrywany gaz przemieszcza się w poziomym przewodzie, posiadającym trzy zmienne przekroje (rys. 19). Rurociąg jest szczelny, więc do każdego przekroju dopływa i odpływa ta sama masa gazu w odniesieniu do jednostki czasu. Wszystkie przekroje są całkowicie wypełnione czynnikiem. Z warunków zadania wynika konieczność uwzględnienia

zmiany gęstości  $[\rho]$  i objętości właściwej  $[v]$  gazu dla różnych przekrojów, co może być konsekwencją zmian ciśnienia i temperatury. Dla trzech przekrojów określono następujące parametry przepływu:

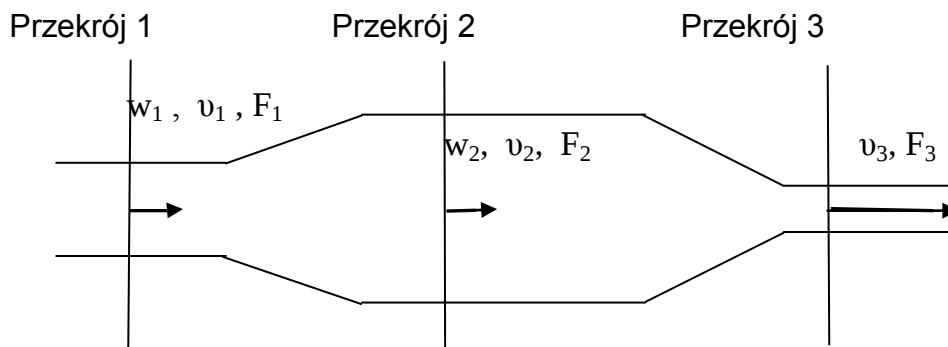
$$F_1 = 0,5 \text{ m}^2, \quad w_1 = 2 \text{ m/s}, \quad v_1 = 0,8 \text{ m}^3/\text{kg},$$

$$F_2 = 2,4 \text{ m}^2, \quad w_2 = 0,4 \text{ m/s},$$

$$F_3 = 0,3 \text{ m}^2, \quad v_3 = 0,75 \text{ m}^3/\text{kg}.$$

Należy obliczyć:

- gęstość i objętość właściwą gazu w przekroju 2,
- liniową prędkość przepływu w przekroju 3,
- masowe natężenie przepływu.



Rys 19. Schemat przepływu gazu w przewodzie o zmiennym przekroju (zmienne  $v, \rho$ )

Podstawowa zależność ma postać :

$$\dot{m} = \frac{F_1 \cdot w_1}{v_1} = \frac{F_2 \cdot w_2}{v_2} = \frac{F_3 \cdot w_3}{v_3} = \text{const} [\text{kg/s}]$$

Obliczamy kolejno :

$$\frac{F_1 \cdot w_1}{v_1} = \frac{F_2 \cdot w_2}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{F_2 \cdot w_2}{F_1 \cdot w_1} \cdot v_1$$

Objętość właściwa:  $v_2 = 0,4 \cdot 2,4 / (0,5 \cdot 2) \cdot 0,8 = 0,768 \text{ m}^3/\text{kg}$

Gęstość:  $\rho_2 = 1/v_2 = 1/0,768 = 1,302 \text{ kg/m}^3$ .

Prędkość liniowa  $w_3 = F_1 \cdot w_1 \cdot v_3 / (F_3 \cdot v_1) = 0,5 \cdot 2 \cdot 0,75 / (0,3 \cdot 0,8) = 3,12 \text{ m/s}$ .

**Masowe natężenie przepływu :**

$$\dot{m} = \frac{F_1 \cdot w_1}{v_1} = \frac{0,5 \cdot 2}{0,8} = 1,25 \text{ kg/s}.$$

## ZADANIE H2 ]

W kotłowym podgrzewaczu powietrza zachodzi przemiana izobaryczna podczas której powietrze o temperaturze początkowej  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  podgrzewane jest do temperatury końcowej równej  $T_2 = 250^\circ\text{C}$ , przy ciśnieniu powietrza równym  $p_{\text{ot}} = 1 \text{ bar}$ .

Obliczyć ilość ciepła  $Q^*$  pobieraną przez powietrze jeżeli jego masowe natężenie przepływu wynosi  $\dot{m} = 30 \text{ kg/s}$ . Obliczyć średnią, liniową prędkość przepływu w przewo-

Termodynamika technika ciepła & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

dzie (kanał) wylotowym podgrzewacza, jeżeli sumaryczny przekrój kanałów przepływowych wynosi  $F = 3 \text{ m}^2$ . Potrzebne dane przyjąć z tablic dla temperatury średniej powietrza. Wszystkie poniższe obliczenia wygodnie jest wykonać w odniesieniu do przedziału czasowego równego 1 s.

Dane:

- a) średnie ciepło właściwe dla powietrza w zakresie temperatury 20 do  $250^\circ\text{C}$  wynosi  $c_p = 1016 \text{ J/(kg K)}$ ,
- b) indywidualna stała gazowa  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ .

W procesie izobarycznym przyrost ciepła jest równy przyrostowi entalpii (co wynika z 2. postaci 1. zasady termodynamiki).

Obliczamy kolejno:

1. Przyrost entalpii  $\Delta i = c_p (T_2 - T_1) = 1016 \cdot (250 - 20) = 233\,700 \text{ J/kg}$
2. Ilość ciepła :

$$\dot{Q}^* = \dot{m} \Delta i = 30 \cdot 233\,700 = 7\,011 \text{ kJ/s.}$$

3. Gęstość powietrza ( z równania stanu gazu):

$$T_2 = 250 + 273 = 523 \text{ K}$$

$$\rho_2 = p / (R T_2) = 100\,000 / (287 \cdot 523) = 0,666 \text{ kg/m}^3.$$

4. Prędkość przepływu powietrza wynika z masowego natężenia przepływu:

$$\dot{m} = w F \rho_2, \quad \text{czyli } w = \frac{\dot{m}}{F \rho_2} = \frac{30}{3 \cdot 0,666} = 15 \text{ m/s.}$$

$$w = 15 \text{ m/s.}$$

..===

### 13. Wykaz oznaczeń podstawowych parametrów .....

## Oznaczenia podstawowych parametrów w matematycznym opisie procesów wymiany ciepła

### 1. Symbole łacińskie

$a$  – współczynnik wyrównywania temperatury,  $a = \lambda / (\rho \cdot c)$ , [ m<sup>2</sup>/s ],

$a_2$  – współczynnik wyrównywania temperatury materiału formy,  $a_2 = \lambda_2 / (\rho_2 \cdot c_2)$ , [ m<sup>2</sup>/s ],

$a_m$  – współczynnik wyrównywania temperatury medium (konwekcja),

$b_2$  – współczynnik akumulacji ciepła materiału formy,  $b_2 = \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}$ , [ W s<sup>1/2</sup> / (m<sup>2</sup> K) ],

$c$  – ciepło właściwe, [ J / (kg K) ],

$c_2$  – ciepło właściwe masy formierskiej, [ J / (kg K) ],

$C_0$  – iloczyn:  $10^{-8} \sigma_0 = 5,67$  W / (m<sup>2</sup> K<sup>4</sup>),

$d_e$  – charakterystyczny (ekwiwalentny) wymiar liniowy ciała, [ m ],

$F$  – powierzchnia stygnięcia [ m<sup>2</sup> ],

$g$  – przyspieszenie ziemskie [ m / s<sup>2</sup> ],

$Gr = \beta_m v_m^{-2} g d_e^3 \Delta T$  – kryterium Grashofa,

$L$  lub  $L_1$  – ciepło krzepnięcia metalu, [ J / kg ],

$L_{1p}$  – ciepło krzepnięcia powiększone o ciepło przegrzania metalu [ J / kg ],

$Nu = \alpha \cdot \frac{d_e}{\lambda_m}$  – kryterium Nusselta,

$Pr = \frac{v_m}{a_m}$  – kryterium Prandtla,

$q$  – gęstość strumienia cieplnego lub krótko strumień cieplny, [ W / m<sup>2</sup> ],

$q_{pow}$  – strumień cieplny na powierzchni (np. półprzestrzeni), [ W / m<sup>2</sup> ],

$q_L$  – liniowa gęstość strumienia cieplnego dla układu cylindrycznego, [ W / m ],

$Q$  – ogólna ilość „dowolnego rodzaju” ciepła, [ J ],

$Q_1$  – całkowita ilość ciepła oddawana przez odlew, [ J ],

$X_1$  – charakterystyczny wymiar ciała klasycznego (płyta nieogr., walec niesk., kula), [ m ],

$M$  – moduł ciała stygnącego lub odlewu [ m ],

$T$  – temperatura bezwzględna w równaniach opisujących promieniowanie cieplne [ K ],

$T_{1p}$  – temperatura początkowa (średnia) metalu w momencie wypełnienia wnęki formy [ °C ],

$T_{kr}$  – temperatura krzepnięcia metalu odlewu [ °C ],

$T_0$  – patrz  $T_{2p}$  (indeks '0' może być dla przypadku formy zastąpiony przez '2p'),

$u_\xi$  – rzeczywista, liniowa prędkość krzepnięcia odlewu [ m / s ],

$u_v$  – rzeczywista, objętościowa prędkość krzepnięcia odlewu [ m<sup>3</sup> / s ],

$V$  – objętość ciała [ m<sup>3</sup> ].

### 2. Symbole greckie

$\alpha$  – współczynnik wymiany ciepła, [ W / (m<sup>2</sup> · K) ],

$\beta_m$  – współczynnik rozszerzalności objętościowej płynu (konwekcja),

$\varepsilon$  – emisyjność (zdolność promieniowania),

$v_m$  – lepkość kinematyczna medium,

$\lambda$  – współczynnik przewodzenia ciepła, [ W / (m K) ],

$\lambda_1$  – współczynnik przewodzenia ciepła metalu odlewu, [ W/ (m K) ],  
 $\lambda_2$  – współczynnik przewodzenia ciepła materiału formy, [ W/ (m K) ],  
 $\lambda_{pow}$  – współczynnik przewodzenia ciepła powietrza [ W/ (m K) ],  
 $\xi$  - grubość warstwy zakrzepłego metalu, [ m, mm ],

$\vartheta_x$  – spiętrzenie temperatur (różnica) odniesione do wartości odpowiadającej temperaturze „ $T_x$ ”  
 ( $\vartheta_x = T_x - T_{2p}$ ), [K],

$\vartheta_{lp}$  – spiętrzenie odniesione do temperatury początkowej ciekłego metalu „ $T_{lp}$ ”, [K],

$\theta_x$  - bezwymiarowa temperatura ciała odniesiona do temperatury  $T_x$ ,

np. dla formy przy warunkach brzegowych WB1r mamy:  $\theta_x = (T_x - T_{pow}) / (T_{2p} - T_{pow})$ ,

$\theta_{pow}$  - bezwymiarowa temperatura ciała, odniesiona do temperatury powierzchni  $T_{pow}$ ,

$\rho$  – gęstość materiału, [ kg/ m<sup>3</sup> ],

$\rho_1$  – gęstość materiału odlewu, [ kg/ m<sup>3</sup> ],

$\rho_2$  – gęstość materiału formy, [ kg/ m<sup>3</sup> ],

$\sigma_0$  - stała promieniowania ciała doskonale czarnego,  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  W/ (m<sup>2</sup> K<sup>4</sup>),

$\tau_3$  - czas krzepnięcia, czyli sumaryczny czas trwania trzech pierwszych okresów stygnięcia odlewu, s

$v$  - objętość właściwa  $v = 1/ \rho$  , [ m<sup>3</sup>/ kg ],

$\Delta T$  - różnica temperatur, spiętrzenie temperatury w procesie konwekcji (w liczbie Gr), [K],

$\Delta T_p$  - przegrzanie metalu (zakres temperatury przegrzania,  $\Delta T_p = T_{lp} - T_{sol}$ ), [K].

### 3. Nazwy wybranych znaków

$\varepsilon$  - sigma,

$\xi$  - ksi,

$\sigma$  - sigma,  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  W/ (m<sup>2</sup> K<sup>4</sup>),

$\vartheta$  - theta (litera mała)

$\theta$  - theta (litera duża)

$\tau$  - tau (litera mała)

$v$  - „fał” (litera mała, nie powinna być pisana jako ‘v’, aby nie pomylić z objętością V!).

## **14. Wybrane parametry termofizyczne metali, stopów i form piaskowych**

Tabela 1. Właściwości termofizyczne metali i stopów - cz.1

| Własność               | Jednostka           | Temp. °C | Aluminium | Miedź | żelazo | Stal węglowa | Żeliwo szare |
|------------------------|---------------------|----------|-----------|-------|--------|--------------|--------------|
| Gęstość, $\rho$        | .kg/ m <sup>3</sup> | ciecz    | 2380      | 8300  | 6900   | 7000         | ?            |
| j. w.                  | .kg/ m <sup>3</sup> | 20       | 2700      | 8920  | 7860   | 7500         | 7200         |
| Współczynnik $\lambda$ | W/ (m K)            | ciecz    | 104       | ?     | 23     | 23           | 18           |
| j. w.                  | W/ (m K)            | 100      | 213       | 385   | 87     | 55           | 42 - 57      |
| Ciepło wł. C           | J/ (kg K)           | ciecz    | 1290      | 544   | 920    | 840          | 840          |
| j. w.                  | J/ (kg K)           | 100      | 913       | 394   | 460    | 480          | 540          |
| j. w.                  | J/ (kg K)           | 500      | -         | -     | -      | 540          | -            |
| Ciepło krzep. L        | kJ/ kg              | -        | 390       | 204   | 270    | 270          | 270          |

|                      |               |       |    |     |      |             |             |
|----------------------|---------------|-------|----|-----|------|-------------|-------------|
| $\cdot a \cdot 10^6$ | $\cdot m^2/s$ | ciecz | 40 | ?   | 3,7  | 3,9         | ?           |
| j. w.                | $\cdot m^2/s$ | 100   | 85 | 110 | 17,8 | <b>14,4</b> | 10,8 - 14,7 |

**Kursywą** oznaczono wartości średnie z różnych danych literaturowych.

Tabela 2. Właściwości termofizyczne metali i stopów - cz. 2

| Własność               | Jednostka      | Temp. °C | Cynk | Krzem | Cyna | AK6      | Mosiądz (10%Zn) |
|------------------------|----------------|----------|------|-------|------|----------|-----------------|
| Gęstość, $\rho$        | $\cdot kg/m^3$ | ciecz    | 6700 | -     | 6980 | 2360     | ok. 8000        |
| j. w.                  | $\cdot kg/m^3$ | 20       | 7200 | 2340  | 7310 | 2680     | 8600            |
| Współczynnik $\lambda$ | W/(m K)        | ciecz    | 58   | -     | 34   | -        | -               |
| j. w.                  | W/(m K)        | 100      | 109  | -     | 61   | ok. 170  | ok. 120         |
| Ciepło wł. C           | J/(kg K)       | ciecz    | 500  | -     | 255  | ok. 1280 | ok. 150         |
| j. w.                  | J/(kg K)       | 100      | 390  | 730   | 230  | ok. 900  | 390             |
| j. w.                  | J/(kg K)       | 500      | -    | -     | -    | -        | -               |
| Ciepło krzep. L        | kJ/kg          | -        | 101  | 1803  | 60,3 | 483      | ok. 194         |

Tabela 3. Wartości ciepła krzepnięcia stopów Al – Si [kJ/kg] wg reguły addytywności

| Zaw.Si [%] | 0   | 2   | 4   | 6   | 8   | 10  |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| L, kJ/kg   | 399 | 427 | 455 | 483 | 511 | 539 |

Tabela 4. Wartości współczynnika przewodzenia ciepła dla stali niskowęglowej od temperatury [W/(m K)] wg Krasnoszczekowa (s. 242).

| Wsp. przew. Ciepła $\lambda$ w temp. [°C] | 20 | 100  | 200 | 300 | 400 | 500  | 600  |
|-------------------------------------------|----|------|-----|-----|-----|------|------|
| 0,15 % C                                  | 58 | 54** | 50  | 46  | 42  | 38   | 33,5 |
| 0,3 % C                                   | 54 | 50   | 46  | 42  | 38  | 33,5 | 29,3 |

\*\* według innych badań (dla 100 °C)  $\lambda = 57$  W/(m K)

Tabela 5. Wartości średniego ciepła właściwego dla stali średniowęglowej dla zmianego zakresu temperatury [J/(kg K)]

|                                   |             |             |             |             |             |              |
|-----------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| Śr. ciepło wł.<br>w zakresie [°C] | $C_0^{100}$ | $C_0^{200}$ | $C_0^{300}$ | $C_0^{400}$ | $C_0^{500}$ | $C_0^{1000}$ |
| J/(kg K)                          | 477         | 490         | 507         | 523         | 544         | ok. 600      |

Tabela 6. Przybliżone właściwości termofizyczne typowych materiałów form piaskowych suchych (dane różnych autorów są bardzo rozbieżne !)

| Własność                        | Jednost-<br>ka                             | Zakres temp. for-<br>my, 20 – 550 °C | Zakres temp. for-<br>my, 20 – 1200 °C | Zakres temp. formy,<br>20 – 1500 °C |
|---------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| Gęstość, $\rho$                 | .kg/ m <sup>3</sup>                        | 1600 - 1800                          | 1600 - 1800                           | 1600 - 1800                         |
| Współczynnik $\lambda$          | W/ (m K)                                   | 0,6 – 0,7                            | 0,7 – 0,8                             | 0,8 – 0,9                           |
| Ciepło własc. C                 | J/ (kg K)                                  | 1030                                 | 1100                                  | 1140                                |
| Wsp. akumulacji<br>ciepła $b_2$ | W s <sup>1/2</sup> /<br>(m <sup>2</sup> K) | 990 - 1250                           | 1110 - 1260                           |                                     |

Tabela 7. Przybliżone wartości współczynników wymiany ciepła (dla epsilon = 0,8)

|                          |      |      |      |      |      |      |       |       |       |       |       |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $T_{\text{pow}}$         | 21   | 26   | 31   | 36   | 41   | 46   | 51    | 61    | 71    | 81    | 91    |
| $\alpha_{\text{kon}}$    | 1,62 | 2,93 | 3,56 | 4,01 | 4,37 | 4,67 | 4,92  | 5,34  | 5,68  | 5,97  | 6,21  |
| $\alpha_{\text{rad}0,8}$ | 4,6  | 4,71 | 4,83 | 4,95 | 5,08 | 5,21 | 5,34  | 5,61  | 5,90  | 6,20  | 6,51  |
| $\alpha_{\text{ef}}$     | 6,2  | 7,64 | 8,39 | 8,97 | 9,45 | 9,87 | 10,26 | 10,95 | 11,58 | 12,16 | 12,72 |
| $T_{\text{pow}}$         | 20   | 25   | 30   | 35   | 40   | 45   | 50    | 60    | 70    | 80    | 90    |
| $\alpha_{\text{efx}}$    | 6    | 7,4  | 8,25 | 8,9  | 9,35 | 9,8  | 10,2  | 10,9  | 11,5  | 12,1  | 12,65 |

Tabela 8. Przybliżone efektywne współczynniki wymiany ciepła (dla epsilon = 0,8)

|                      |    |     |      |     |      |     |      |      |      |      |       |
|----------------------|----|-----|------|-----|------|-----|------|------|------|------|-------|
| $T_{\text{pow}}$     | 20 | 25  | 30   | 35  | 40   | 45  | 50   | 60   | 70   | 80   | 90    |
| $\alpha_{\text{ef}}$ | 6  | 7,4 | 8,25 | 8,9 | 9,35 | 9,8 | 10,2 | 10,9 | 11,5 | 12,1 | 12,65 |

Przybliżone równanie opisujące efektywny współczynnik wymiany ciepła - dla temperatur powierzchni od 40 do 100 °C - opisuje funkcja o postaci :

$$\alpha_{\text{ef}} = 33,64 - 47,4 \cdot T_{\text{pow}}^{-0,18}$$

## **15. Zadanie kontrolne dla studentów niestacjonarnych** (Luty 2012) **C2**

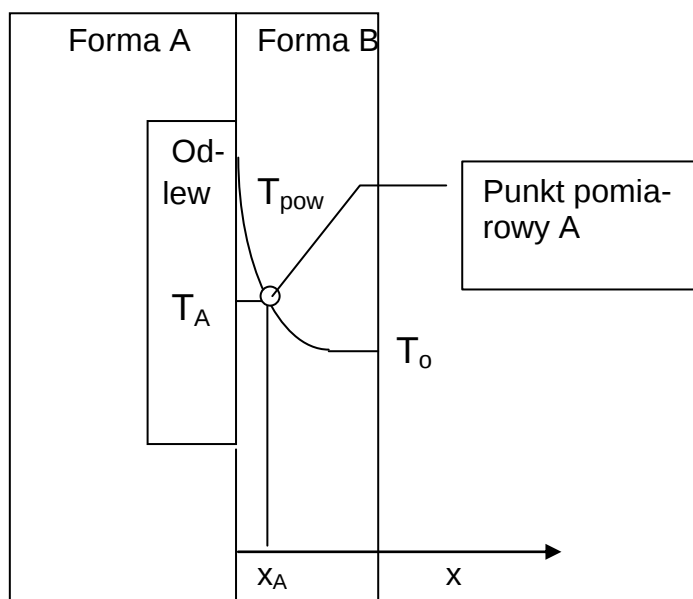
W formie piaskowej spełniającej warunek nieograniczoności w sensie cieplnym, krzepnie odlew aluminiowej płyty. Przed momentem zakrzepnięcia odlewu, po upływie czasu

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

$\tau_A$  = (dobrać z tabeli), zmierzono - za pomocą termoelementu - temperaturę formy piaskowej w odległości od powierzchni kontaktu odlew-forma równej  $x_A$  (z tabeli), która wynosiła  $T_A$  (tabela). Temperatura początkowa formy wynosiła  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Ponieważ czas pomiaru nie przekroczył czasu krzepnięcia odlewu, możliwe jest założenie wartości temperatury powierzchni  $T_{\text{pow}}$  równej temperaturze krzepnięcia odlewu.

$T_{\text{pow}} = T_{\text{kr}} = 660^\circ\text{C}$ . Wyznaczyć wartość współczynnika wyrównywania temperatury dla materiału formy  $a_2$  oraz wartość współczynnika akumulacji  $b_2$ , jeżeli znamy gęstość i ciepło właściwe materiału formy równe:  $\rho_2$  (z tabeli) i  $c_2 = 1100 \text{ J/(kg K)}$ .

Schemat badanego układu



#### Podpowiedź:

Parametry punktu pomiarowego A ( $T_A$ ,  $x_A$ ,  $\tau_A$ ) muszą spełniać równanie :

$$\Theta_A = \frac{T_A - T_{\text{pow}}}{T_0 - T_{\text{pow}}} = \text{erf} \left( \frac{x_A}{2\sqrt{a_2 \tau_A}} \right)$$

DANE DO PRACY KONTROLNEJ - wybrać wg kolejności na liście studentów Lp

| Lp     | $x_a$ , mm | Czas $\tau_A$ , s | $T_A$ , $^\circ\text{C}$ | $T_{\text{pow}}$ , $^\circ\text{C}$ | $\rho_2$ , kg/ m <sup>3</sup> |
|--------|------------|-------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1 - 3  | 5 - 10     | 300               | 400 - 450                | 660                                 | 1600                          |
| 4 - 6  | 11- 15     | 360               | 350- 390                 | 660                                 | 1650                          |
| 6 – 8  | 16- 20     | 420               | 300- 340                 | 660                                 | 1700                          |
| Reszta | 21- 25     | 500               | 250 - 390                | 660                                 | 1730                          |

Uwaga: drugie zadanie kontrolne: Wyznaczenie grubości izolacji pieca wg  $T_{\text{pow}}$ . zew (współczynniki dla konwekcji i promieniowania).

#### **16. Pytania do ćwiczeń laboratoryjnych 25. 01. 2012**

1. Opisać pojęcie warunków brzegowych 3. rodzaju, wymienić ciała klasyczne.

2. Wymienić co najmniej 3 liczby bezwymiarowe występujące na nomogramach do wyznaczania bezwymiarowej temperatury ciał klasycznych
3. Czy promień walca do badań współczynnika przewodzenia ciepła ma wpływ na wartość liczby Biota ; podać wzór na liczbę Biota dla walca z powłoką izolacyjną.
4. Opisać pojęcia : niestacjonarnego pola temperatury, gradientu temperatury i gęstości strumienia cieplnego.
5. Zdefiniować pojęcia i podać jednostki:  $q$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $\rho_2$ ,  $\vartheta_{\text{pow}}$  (małe theta!).
6. Jaki parametr może być wyznaczony w oparciu o rejestrację temperatury w wybranym miejscu formy ?
7. Prawo Fouriera jako podstawa bilansu cieplnego (2, 4).
8. Pole temperatury półprzestrzeni przy ustalonych warunkach brzegowych 1. rodzaju i wykorzystanie go doświadczalnego wyznaczenia współczynnika wyrównywania temperatury  $a_2$  dla formy piaskowej .
9. Podaj 3 podstawowe i 2 uzupełniające parametry termofizyczne materiału formy piaskowej oraz ich jednostki .
10. Definicja i wykres funkcji błędów Gaussa (2, 3, 4).
11. Zdefiniować pojęcie objętościowego i masowego natężenia przepływu oraz ciśnienia dynamicznego.
12. Wymienić 3. podstawowe rodzaje przepływu.
13. Dane jest objętościowe natężenie przepływu równe  $0,03 \text{ m}^3/\text{s}$ , ciśnienie dynamiczne równe  $100 \text{ Pa}$  i prędkość średnia  $w = 20 \text{ m/s}$ . Jak wyznaczyć masowe natężenia przepływu ?

#### Wybrane wzory

$a_2$  – współczynnik wyrównywania temperatury materiału formy,  $a_2 = \lambda_2 / (\rho_2 \cdot c_2)$ ,  $[\text{m}^2/\text{s}]$ ,

$b_2$  – współczynnik akumulacji ciepła materiału formy,  $b_2 = \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}$ ,  $[\text{W s}^{1/2}/(\text{m}^2 \text{K})]$ ,

$\rho_2$  – gęstość materiału formy piaskowej  $\text{kg}/\text{m}^3$ ,

$c_1$  – ciepło właściwe metalu odlewu w stanie stałym,  $[\text{J}/(\text{kg K})]$ ,

$c_2$  – ciepło właściwe masy formierskiej,  $[\text{J}/(\text{kg K})]$ ,

$\vartheta_{\text{pow}}$  - spiętrzenie temperatury odniesione do wartości odpowiadającej temperaturze „ $T_{\text{pow}}$ ” ( $\vartheta_{\text{pow}} = T_{\text{pow}} - T_0$ ),  $[\text{K}]$

$\vartheta_x$  – spiętrzenie temperatury odniesione do wybranej temperatury  $T_x$ ,  $[\text{K}]$ ,

$\theta_x$  - bezwymiarowa temperatura ciała odniesiona do temperatury  $T_x$ ,

np. dla formy przy warunkach brzegowych WB1r mamy:  $\theta_x = (T_x - T_{\text{pow}}) / (T_{2p} - T_{\text{pow}})$ ,

$\theta_{\text{osi}}$  - bezwymiarowa temperatura ciała odniesiona do temperatury osi walca  $T_{\text{osi}}$ ,

np. dla nagrzewania nieskończonego walca w warunkach brzegowych WB3r mamy

$$\theta_{\text{osi}} = (T_{\text{osi}} - T_{\text{ot}}) / (T_{2p} - T_{\text{ot}}),$$

$\theta_{\text{pow}}$  - bezwymiarowa temperatura ciała, odniesiona do temperatury powierzchni  $T_{\text{pow}}$ ,

**KONIEC CZĘŚCI 1**

## 17. Część II. Wybrane zagadnienia z przemian gazowych

### 17.1. Podstawowe parametry przemian termodynamicznych (konspekt TTT61- AG5)

Podstawowymi pojęciami są:

- energia wewnętrzna  $u$  (wzór 1b),
- praca zewnętrzna  $l_z$ , (1c),
- praca techniczna  $l_t$ , (2c)
- entalpia  $i$  (wzór 2b lub 3).

| Pojęcie        | Energia wewnętrzna    | Praca zewnętrzna   | Praca techniczna    | Entalpia     |
|----------------|-----------------------|--------------------|---------------------|--------------|
| Zależność (nr) | $du = c_v dT$<br>(1b) | $dl_z = p dv$ (1c) | $dl_t = -v dp$ (2c) | (2b) lub (3) |

Dwie postacie 1. zasady termodynamiki (dla 1 kg gazu)

| <b>1ZTp1</b> => 1. zasada termodynamiki - postać 1. | <b>1ZTp2</b> => 1. zasada termodynamiki - postać 2 | Wymiar  |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------|
| $dq = du + dl_z$ (1a)                               | $dq = di + dl_t$ (2a)                              | [J/ kg] |
| $du = c_v dT$ (1b)                                  | $di = c_p dT$ (2b)                                 | [J/ kg] |
| $dl_z = p dv$ (1c)                                  | $dl_t = -v dp$ (2c)                                | [J/ kg] |

Uwaga 1: 1ZTp2 (postać 2) wynika z wyrugowania zmiennej  $u$  (energia wewnętrzna) i zastąpienie jej entalpią, zgodnie z zależnością:  $i = u + p v$  [J/ kg] (3)

Uwaga 2: przyjęto umowę, że małe litery występują w zależnościach opisujących parametry odniesione do masy gazu 1 kg

### 17.2. Parametry przemian termodynamicznych

| Rodzaj przemiany                                | Praca zewnętrzna ( $l_z$ lub $\Delta l_z$ ) | Przyrost ciepła [J/ kg]      | Przyrost energii wewnętrznej | Praca techniczna        |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| Izobara<br>. $dp = 0$ , $v/T = \text{const}$    | . $l_z = p (v_2 - v_1)$                     | $\Delta q = c_p (T_2 - T_1)$ | $\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$ | . $l_t = 0$             |
| Izochora<br>$dv = 0$ , $p/T = \text{const}$     | . $l_z = 0$                                 | $\Delta q = \Delta u$        | $\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$ | $l_t = v (p_1 - p_2)$   |
| Adiabata<br>. $dq = 0$ , $p v^k = \text{const}$ | $l_z = -\Delta u = -c_v (T_2 - T_1)$        | $dq = 0$                     | $\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$ | $l_t = c_p (T_2 - T_1)$ |
| Izoterma<br>. $dT = 0$ , $p v = \text{const}$   | $l_z = RT \ln(v_2/v_1)$                     | $\Delta q = l_z$             | $\Delta u = 0$               | $l_t = RT \ln(p_1/p_2)$ |

$R$  – indywidualna stała gazowa [J/ (kg K)] zgodnie z równaniem stanu gazu  $p v = RT$  [J/ kg]

Uwaga 3: logarytm we wzorach (izoterma) wynika np. z całki „ $dp/p$ ” =  $\ln p$  (z war.:  $p_1, p_2$ )

Uzasadnienie przykładowych zależności z tabeli (17.2)

a) dla izobary mamy :  $dp = 0 \Rightarrow dl_t = 0 \Rightarrow dq = di \Rightarrow \Delta q = \Delta i = c_p (T_2 - T_1)$

b) dla izochory mamy :  $dv = 0 \Rightarrow dl_z = 0 \Rightarrow dq = du \Rightarrow \Delta q = \Delta u$

c) dla izotermi mamy :  $dT = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow dq = dl_z \Rightarrow \Delta q = \Delta l_z$

d) dla adiabaty:  $dq = 0 \Rightarrow dl_z = - du = - c_v dT \Rightarrow$  po całkowaniu:

$l_z = - c_v (T_2 - T_1)$  oraz  $dl_t = di = c_p dT \Rightarrow$  po całkowaniu  $l_t = c_p (T_2 - T_1)$ .

**Uwaga 4:**  $v = 1/\rho$  - małe „V”, objętość właściwa [ $m^3/kg$ ], a duże „V” - objętość [ $m^3$ ].

### 17. 3. Definicje innych parametrów

Poniższa tabela przedstawia (wybiórczo!) najczęściej stosowane pojęcia i parametry niezbędne do matematycznego opisu procesów termodynamicznych.

| Symbol                   | Nazwa parametru (pojęcia)                    | Jednostka             | Przykłady zależności                    |
|--------------------------|----------------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------------|
| <b>Q</b>                 | Ciepło                                       | J/ kg                 | $dq = du + dl_z$                        |
| <b>U</b>                 | energia wewnętrzna (małe u, więc dla 1 kg)   | J/ kg                 | $du = c_v dT$ (definicja)               |
| <b>c<sub>v</sub></b>     | ciepło właściwe przy stałej objętości        | J/(kg K)              | $R_i = c_p - c_v$                       |
| <b>l<sub>z</sub></b>     | praca zewnętrzna ( małe l , więc dla 1kg)    | J/ kg                 | $dl_z = - p dv$ , $dq = du + dl_z$      |
| <b>l<sub>t</sub></b>     | praca techniczna ( małe l , więc dla 1kg)    | J/ kg                 | $dl_t = - v dp$ , $dq = di + dl_t$      |
| <b>v</b>                 | objętość właściwa ( czytaj ‘fał’)            | $m^3/kg$              | $v = 1/\rho = V/m$ (definicja)          |
| <b>i *</b>               | entalpia właściwa ( małe ‘i’ , więc dla 1kg) | J/ kg                 | $i = u + p v$ (definicja)               |
| <b>p</b>                 | Ciśnienie                                    | Pa= N/ m <sup>2</sup> | $p = \rho R T$                          |
| <b>R<sub>i</sub> , R</b> | stała gazowa indywidualna                    | J/(kg K)              | $p v = R T$ , $p V = m R T$             |
| <b>R<sub>u</sub></b>     | stała gazowa uniwersalna                     | J/ (kmol K)           | $R = R_u / M$ , $R_u = 8315 J/(kmol K)$ |
| <b>M</b>                 | masa molowa                                  | kg/kmol **            | $R = R_u / M$                           |
| <b>V</b>                 | Objętość                                     | m <sup>3</sup>        | $\rho = m/ V$ (definicja)               |
| <b>.m</b>                | Masa                                         | kg                    | $.m = V/ v$                             |
| <b>.ρ</b>                | gęstość (czytaj ‘ro’)                        | kg/ m <sup>3</sup>    | $p = \rho R T$ [ Pa ]                   |
| <b>k</b>                 | wykładnik adiabaty                           | -                     | $k = c_p / c_v$ , $c_v = R/(k-1)$       |

\* w chemii oznacza się najczęściej przez ‘h’

\*\* mimo, że zgodnie u układem jednostek SI jednostką ilości substancji (obok kg) jest mol, w obliczeniach termodynamicznych bardziej wygodna jest jednostka większa czyli kmol.

Uwaga : kropki w dwu ostatnich wierszach zabezpieczają nas przed zamianą symboli v i ρ na litery DUŻE

### 17. 4. Przykłady obliczeniowe parametrów przemian gazowych

65

#### Zadanie 1 ( równanie stanu gazu)

Zadanie z równania stanu gazu ( wg Teodorczyka s.34)

26.03.2007

Do przechowywania sprężonego gazu używa się często butli stalowych o pojemności 100 dm<sup>3</sup>. Przyjmując temperaturę gazu równą 20 °C, obliczyć minimalną liczbę butli niezbędnych do zmagazynowania 200 kg tlenu, jeżeli maksymalne dopuszczalne nadciśnienie w butli wynosi

$p_n = 180$  bar. Założyć wartość ciśnienia atmosferycznego wynoszącą 1010 hPa. Wyznaczyć również nadciśnienie rzeczywiste gazu przy zastosowaniu minimalnej liczby butli.

Dane :

Pojemność jednej butli  $V_1 = 100 \text{ dm}^3$

Masa całkowita gazu  $m_c = 200 \text{ kg}$

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

Temperatura  $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$

Nadciśnienie  $p_n = 180\text{ bar} = 18\text{ MPa}$

Ciśnienie atmosferyczne  $p_b = 1010\text{ hPa} = 0.101\text{ MPa}$

$1\text{ bar} = 100\,000\text{ Pa} = 1000\text{ hPa} = 0.1\text{ MPa}$

Szukane :

Maksymalna masa tlenu w jednej butli  $m_{1\max} (?)$

lub minimalna liczba butli spełniająca wszystkie założenia  $n_{\min} (?)$

nadciśnienie rzeczywiste

Rozwiązanie (A) : minimalna liczba butli

W zadanych warunkach termodynamicznych objętość właściwa gazu ( można też obliczać gęstość !) w każdej butli wyniesie:

$$v = R_i T / p \quad (1)$$

lub  $\rho = p / ( R_i T )$

Obliczamy parametry równania (1)

Stała gazowa indywidualna dla tlenu przy masie molowej  $M = 2 \cdot 16\text{ kg/kmol}$

$$R_i = R_u / (2 \cdot 16) = 8315 / 32 = 260\text{ J/(kg K)}$$

Temperatura bezwzględna

$$T = t + 273 = 20 + 273 = 293\text{ K}$$

Ciśnienie bezwzględne ( wyjaśnienie na rysunku 1)

$$p = p_b + p_n = 1010 \cdot 100 + 180 \cdot 100\,000 = 181\,010\text{ hPa} = 18,1\text{ MPa}$$

Objętość właściwa

$$v = 260 \cdot 293 / (181\,010 \cdot 10^2) = 0.00421\text{ m}^3/\text{kg}$$

Gęstość gazu ( maksymalna) wyniesie

$$\rho = 1/v = 1/0.00421 = 23.8\text{ kg/m}^3$$

Maksymalna masa gazu w jednej butli

$$m_{1\max} = V_1 / v = 100 \cdot 10^{-3} / 0.00421 = 23.8\text{ kg}$$

Minimalna, teoretyczna liczba butli

$$n_{\min} = m_c / m_{1\max} = 200 / 23.8 = 8.4$$

Wymagana, minimalna liczba butli

$$n > n_{\min}, \text{ czyli } n \geq 9$$

Rozwiązanie (B): rzeczywiste nadciśnienie przy minimalnej liczbie butli (n=9)

a) rzeczywista masa 1. butli

$$m_{rz} = m_c / n = 200 / 9 = 22.22\text{ kg}$$

b) rzeczywista gęstość

$$\rho_{rz} = m_{rz} / V_1 = 22.22 / 0.1 = 222.2\text{ kg/m}^3$$

c) rzeczywiste ciśnienie

$$p_{rz} = \rho_{rz} R_i T = 222.2 \cdot 260 \cdot 293 = 16\,927\,000\text{ Pa} = 16,927\text{ MPa}$$

d) nadciśnienie

$$p_{nrz} = p_{rz} - p_b = 16,927\text{ MPa} - 0,101\text{ MPa} = 16,826\text{ MPa}$$

$$p_{nrz} = 16\,826\,000\text{ Pa} = 168,3\text{ bar}$$

## Zadanie 2 ( parametry gazów wilgotnych )

**Zadanie z wilgotności – proces izobaryczny ( 15.05.2006 )**

W procesie izobarycznego podgrzewania połączono 1 m<sup>3</sup> gazu suchego ze 100 g pary wodnej. Ogrzewanie odbyło się pod stałym ciśnieniem barometrycznym równym 0.1 Pa, powodując przyrost temperatury od 20 do 100 C. Zakładając izobaryczny przebieg procesu obliczyć: zawartość wilgoci, wilgotność względną, ciśnienia parcjale, stałą gazową i gęstość powietrza wilgotnego po przemianie.

DANE

$$V_{gs} = 1 \text{ m}^3 ; m_p = 0,1 \text{ kg} ; p_b = 0,1 \text{ Pa} ; t_1 = 20 ^\circ\text{C}; t_2 = 100 ^\circ\text{C}$$

1. Stopień wilgoci (zawartość wilgoci)

$$X = \frac{m_p}{m_{gs}} = \frac{m_p}{\rho_{gs} \cdot V_{gs}} = \frac{0.1}{1.29 \cdot 1}$$

$$X = 0.0775 \frac{\text{kg}}{\text{kg g.s.}}$$

2. Wilgotność względna

$$X = 0.622 \frac{p_p}{p_b - p_p}$$

$$p_p = \varphi p_s = \frac{p_b}{\frac{0.622}{X} + 1}$$

$$\varphi = \frac{X}{X + 0.622} \frac{p_b}{p_s}$$

Dla 100 °C wartość  $p_s(100) = 0.10131 \text{ MPa}$

$$\varphi = \frac{0.0775}{0.0775 + 0.622} \frac{0.1}{0.10131}$$

$$\varphi = 0.109$$

3. Ciśnienia parcjale

$$p_p = \varphi \cdot p_s = 0.109 \cdot 0.10131$$

$$p_p = 0.01104 \text{ MPa}$$

$$p_{gs} = p_b - p_p = 0.1 - 0.01104$$

$$p_{gs} = 0.08896 \text{ MPa}$$

4. Stała gazowa i gęstość

$$R_{gw} = R_{gs} \frac{1}{1+X} + R_p \frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+X} (R_{gs} - XR_p)$$

$$R_p = 461.5; \quad R_{gs} = 287$$

$$R_{gw} = \frac{287}{1+0.0775} + \frac{461.5}{1+0.0775}$$

$$R_{gw} = 296.6 \text{ J/(kg K)}$$

Gęstość dla 100 °C

$$p_b = \rho_2 T_2 R_{gw}$$

$$\rho_2 = \frac{p_b}{T_2 R_{gw}} = \frac{100\,000}{373 \cdot 299.6}$$

$$\rho_2 = 0.895 \text{ kg/m}^3$$

### Zadanie 3 (1 zasady termodynamiki dla przemiany izobarycznej)

#### Wprowadzenie teoretyczne

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki ciepło doprowadzone do układu zamkniętego i nieruchomego zostaje zużyte na zmianę energii wewnętrznej i wykonanie pracy nad siłami zewnętrznymi (pracy zewnętrznej), co zapisujemy :

$$dq = du + dl_z \quad [\text{J/ kg}]$$

Układ zamknięty nie wymienia z otoczeniem substancji, a układ nieruchomy nie zmienia energii kinetycznej.

#### Treść zadania

W grzejnikach powietrznych centralnego ogrzewania czynnikiem termodynamicznym jest powietrze atmosferyczne o temperaturze początkowej ( $T_1$ ) równej 8 °C. Projekt instalacji przewiduje izobaryczne podgrzewanie powietrza do temperatury  $T_2 = 50$  °C. Objętościowe natężenie przepływu powietrza zimnego ( $V^*$ ) wynosi 3200 m<sup>3</sup> na godzinę. Obliczyć:

- ilość doprowadzonego ciepła,
- część ciepła zużyta na wzrost energii wewnętrznej,
- część ciepła powodującą przyrost objętości gazu (co odpowiada definicji pracy zewnętrznej),
- moc cieplną procesu ogrzewania.

Wszystkie obliczone parametry będą odniesione do interwału czasowego równego 1 godzinie. Z tablic odczytujemy dla powietrza:  $R_i = 287 \text{ J/(kg K)}$  i  $c_v = 720 \text{ J/(kg K)}$ . W tzw. warunkach normalnych ciśnienie atmosferyczne (barometryczne) wynosi  $p_b = 1013,25 \text{ hPa}$ , czyli  $p_1 = p_b$ .

Początkowa i końcowa objętość właściwa powietrza

$$v_1 = R_i T_1 / p_1 = 287 \cdot (8 + 273) / 101\,325 = 0,796 \text{ m}^3 / \text{kg}.$$

$$v_2 = R_i T_2 / p_2 = 287 \cdot (50 + 273) / 101\,325 = 0,915 \text{ m}^3 / \text{kg}.$$

Masa powietrza dla 1 godziny (zgodnie z definicją masowego natężenia przepływu  $m^*$ ) :

$$m^* = V^* / v_1 = 3200 / 0,796 = 4020 \text{ kg} / \text{h}.$$

Wartość pracy zewnętrznej dla 1 kg powietrza :

$$l_z = p_b \cdot (v_2 - v_1) = 101\,325 \cdot (0,915 - 0,796) = 12\,058 \text{ J} / \text{kg}$$

Całkowita wartość pracy zewnętrznej

$$L_z = m^* \cdot l_z = 4020 \cdot 12\,058 = 48\,473 \text{ kJ} \quad (\text{dla 1 godziny lub w kJ} / \text{h}).$$

Przyrost energii wewnętrznej :

$$\Delta u = c_v \cdot (T_2 - T_1) = 720 \cdot (50 - 8) = 30\,240 \text{ J} / \text{kg} \quad \text{oraz}$$

$$\Delta U = m^* \cdot u = 4020 \cdot 30\,240 = 121\,565 \text{ kJ} / \text{h}.$$

Doprowadzone ciepło ( $q$  lub  $\Delta q$ ):

$$q = \Delta u + l_z = 30\,240 + 12\,058 = 42\,298 \text{ J} / \text{kg} \quad \text{oraz}$$

$$\Delta Q = \Delta U + L_z = 121\,565 + 48\,473 = 170\,038 \text{ kJ} / \text{h}.$$

Moc cieplna:

$$Q^* = \Delta Q / \Delta \tau = 170\,038 / 3600 = 47,2 \text{ kW}.$$

Drugi sposób rozwiązywania tego zadania można uzyskać w oparciu o równania opisujące proces przemiany izobarycznej.

#### Zadanie 4 ( przemiana izotermiczna )

Azot posiada objętość początkową  $V_1 = 0,3 \text{ m}^3$  i znajduje się wewnątrz obszaru umożliwiającego zmianę jego objętości, co jest równoznaczne z wykonaniem pracy. Jego początkowe ciśnienie wynosi  $p_1 = 0,4 \text{ MPa}$ . Do gazu doprowadzono izotermicznie ilość ciepła  $\Delta Q = 100 \text{ kJ}$  (wartość dodatnia !). Obliczyć:

- parametry na końcu przemiany,
- pracę zewnętrzną i techniczną,
- objętość właściwą i masę gazu, jeśli przemiana odbyła się w temperaturze  $20^\circ \text{C}$ .

A. Obliczamy ( wg równań dla izotermy) stosunek  $p_1 / p_2$  i ciśnienie  $p_2$

$$\Delta q = l_z = RT \ln (v_2 / v_1) = RT \ln (p_1 / p_2) = p_1 v_1 \ln (p_1 / p_2), \quad [\text{J} / \text{kg}]$$

oraz

$$\Delta Q = m p_1 v_1 \ln (p_1 / p_2) = p_1 V_1 \ln (p_1 / p_2) = 100\,000, \quad [\text{J}]$$

Z powyższego mamy:

$$\ln (p_1 / p_2) = \Delta Q / (p_1 V_1) = 10^5 / (0,4 \cdot 10^6 \cdot 0,3) = 0,833$$

$$p_1 / p_2 = \exp (0,833) = 2,3$$

B. Obliczamy parametry końca przemiany

$$p_2 = p_1 / 2,3 = 0,4 / 2,3 = 0,174 \text{ MPa}$$

$$V_2 = V_1 \cdot p_1 / p_2 = 0,3 \cdot 2,3 = 0,69 \text{ m}^3.$$

C. Praca

$$L_z = L_t = \Delta Q = 100 \text{ kJ}.$$

D. Objętość właściwa i masa gazu

Możemy skorzystać z tablic lub obliczyć stałą gazową dla azotu, korzystając z wartości masy molowej  $M$  [ kg / kmol ] i stałej uniwersalnej  $R_u$  , wg zależności

$$R_i = R_u / M = 8315 / (2 \cdot 14) = 297 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$v_1 = R T / p_1 = 297 \cdot (20 + 273) / (0,4 \cdot 10^6) = 0,218 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Masa gazu :  $m = V_1 / v_1 = 0,3 / 0,218 = 1,38 \text{ kg}$ .

### Zadanie 5 ( przemiana izochoryczna - praca kontrolna )

Bomb kalorymetryczna zawierająca 2 l tlenu ( $M = 32 \text{ kg/ kmol}$ ) o temperaturze  $16^\circ\text{C}$  i ciśnieniu  $p_1 = 1,5 \text{ MPa}$  została podgrzana prądem elektrycznym. W ten sposób doprowadzono do gazu ciepło  $\Delta Q = 50 \text{ ** kJ}$ . Zakładając, że układ nie zmieni swojej objętości ( przemiana izochoryczna) obliczyć temperaturę i ciśnienie po przemianie.

Stała gazowa dla tlenu  $R_i = 8315 / 32 = 260 \text{ J/(kg K)}$ ,  $c_p = 915 \text{ J/(kg K)}$ .

Uwaga: W przemianie izochorycznej wartość pracy zewnętrznej  $L_z = 0$ .

Kolejność obliczanych parametrów:

- masa gazu  $m$  ( $pV = m R_i T$ ),
- przyrost energii wewnętrznej i temperatury ( $\Delta U = \Delta Q$ )
- temperatura po przemianie  $T_2 = T_1 + \Delta T$
- ciśnienie po przemianie  $p_1 / T_1 = p_2 / T_2$   
( należy porównać z przykładem na wykładzie w dniu 18.06.2011)

\*\* do pracy kontr.  $\Delta Q$  przyjąć indywidualnie w granicach 30 do 80 kJ.

### Zadanie 6 ( przemiana adiabatyczna )

Powietrze o masie  $m = 3 \text{ kg}$  i temperaturze początkowej  $t_1 = 300^\circ\text{C}$  rozpręża się adiabatycznie od ciśnienia  $p_1 = 1 \text{ MPa}$  do ciśnienia końcowego  $p_2 = 0,1 \text{ MPa}$ .

Obliczyć:

- a) temperaturę po rozprężeniu,
- b) objętości właściwe i całkowite,
- c) wartość pracy zewnętrznej.

Z tablic mamy dla powietrza  $R = 287 \text{ J/ (kg K)}$  oraz wykładnik adiabaty  $k = 1,4$ .

Równanie wiążące stosunek ciśnień i temperatur wynika z zapisu:

$$p v^k = p \left( \frac{R T}{p} \right)^k = \text{const} \quad , \quad T^k p^{1-k} = \text{const}$$

$$T_1^k p_1^{1-k} = T_2^k p_2^{1-k}$$

Obliczamy  $T_2$

$$T_2 = T_1 \cdot (p_1 / p_2)^{(1-k)/k} = (300 + 273) \cdot (1 / 0,1)^{-0,4/1,4} = 573 \cdot 10^{-0,286} = 296 \text{ K}$$

Obliczamy objętości właściwe i objętości całkowite

$$p_1 v_1 = R T_1 \quad , \quad \text{skąd :}$$

$$v_1 = R T_1 / p_1 = 287 \cdot (300 + 273) / 10^6 = 0,164 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$V_1 = m v_1 = 3 \cdot 0,164 = 0,49 \text{ m}^3$$

$$v_2 = R T_2 / p_2 = 287 \cdot 296 / 10^5 = 0,85 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$V_2 = m v_2 = 3 \cdot 0,85 = 2,55 \text{ m}^3$$

Praca zewnętrzna

$$l_z = - \Delta u = c_v (T_1 - T_2) = R / (k - 1) \cdot (T_1 - T_2) = 287 / 0,4 \cdot (573 - 296) = 198 \, 750 \text{ J}$$

$$L_z = m l_z = 3 \cdot 198,8 \cdot 10^3 = 596 \cdot 10^3 \text{ J} = 596 \text{ kJ}$$

... -----

## Ćwicz. laboratoryjne nr 3

## 18. BADANIE PARAMETRÓW PRZEMIANY IZOTERMICZNEJ I ADIABATYCZNEJ

Katedra Inżynierii Procesów Odlewniczych

(2R- Termod-Adia-Izoter-W43sss)

### 18. 1. Wprowadzenie i wybrane pojęcia termodynamiki

Podstawowymi zależnościami niezbędnymi do matematycznego opisu przebiegu procesów przemian termodynamicznych są:

- równanie stanu gazu doskonałego,
- pierwsza zasada termodynamiki w obu postaciach.

Poniżej przedstawimy uproszczony opis wybranych pojęć, niezbędnych do matematycznego ujęcia podstawowych przemian gazowych (izobaryczna, izotermiczna, izochoryczna i adiabaticzna).

#### A . Indywidualna stała gazowa

Możemy ją określić (nie jest to definicja!), wykorzystując równanie stanu gazu, czyli w postaci

$$R_i = p \, v \, T^{-1} = p \, v / T \quad [ \text{J}/(\text{kg K}) ]$$

gdzie:  $R_i$  – indywidualna stała gazowa,  $\text{J}/(\text{kg K})$ ,

$p$  – ciśnienie,  $\text{Pa}$  ( $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2 = \text{J}/\text{m}^3$ ),

$v$  – objętość właściwa [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ],

$T$  – temperatura bezwzględna,  $\text{K}$ .

Inny wariant jej określenia wynika z wykorzystania równanie Meyera:

$$R_i = c_p - c_v \quad [ \text{J}/(\text{kg K}) ]$$

gdzie:

$c_p$  – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, [ $\text{J}/(\text{kg K})$ ]

$c_v$  – ciepło właściwe przy stałej objętości, [ $\text{J}/(\text{kg K})$ ]

Przykładowe równanie, zwane **równaniem stanu gazu** doskonałego:

$$p \, v = R_i \, T \quad [ \text{J}/\text{kg} ]$$

Jeżeli w równaniu występuje  $R$ , bez indeksu dolnego „i” to domyślamy się, że chodzi o stałą gazową indywidualną, co wynika zresztą jednoznacznie z analizy jednostek tego równania.

Stałej gazowej indywidualnej **nie wolno mylić** z tzw. uniwersalną stałą gazową  $R_u$  [ $\text{J}/(\text{mol K})$ ] lub [ $\text{J}/(\text{kmol K})$ ], której stosowanie w termodynamice jest niewygodne (zdaniem autora), wymaga bowiem znajomości składu chemicznego (molekowego) rozpatrywanego czynnika.

W obliczeniach termodynamicznych niezbyt często stosuje się pojęcie „objętość gazu  $V$  [ $\text{m}^3$ ]”, preferując pojęcie **objętości właściwej**  $v$  [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ]. Pozwala to na ułatwienie obliczeń i odniesienie wielu parametrów do 1 kg gazu. Istnieje umowa, że nazwa takich parametrów zaczyna się od małej litery (np.  $q$ ,  $u$ ,  $l_z$ ,  $i$ ).

Wykresy przemian termodynamicznych (gazowych) w układzie pracy posiadają na osi odciętej objętość właściwą, dzięki czemu pola pracy zewnętrznej  $l_z$  i technicznej  $l_t$  uzyskuje się w  $\text{J}/\text{kg}$

(iloczyn:  $\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} = \text{J}/\text{m}^2 \cdot \text{m}^3/\text{kg} = \text{J}/\text{kg}$ ). Można również – o ile to wykonalne i uzasadnione – przedstawić przebieg procesu w układzie  $p - V$ , czyli ciśnienie w postaci funkcji całkowitej objętości badanego gazu (w sprawozdaniu z ćwiczenia laboratoryjnego nr 7 jest to niewykonalne!).

#### B. Objętość właściwa i gęstość

Objętość właściwą wyraża wzór definicyjny:

$$v = \frac{V}{m} \quad [m^3/kg]$$

$V$  – objętość [ $m^3$ ],  $m$  – masa [kg]

Gęstość jest odwrotnością objętości właściwej :

$$\rho = v^{-1} = \frac{m}{V} \quad [kg/m^3]$$

Przykładowe równanie:

$$p = \rho R_i T \quad [Pa]$$

### C. Przyrost energii wewnętrznej i ciepło

$$du = c_v dT \quad [J/kg]$$

Przykładowe równanie ( **1. zasada termodynamiki** ) :

$$dq = du + dl_z \quad [J/kg]$$

$q$  – ciepło odniesione do 1 kg czynnika (gazu)

Pojęcie ciepła, jako tzw. pojęcie pierwotne, nie wymaga definicji w sensie matematycznym. Dla przemiany izobarycznej (przy stałym ciśnieniu) może być wyrażone w postaci:

$$dq = c_p dT \quad [J/kg]$$

### D. Praca zewnętrzna

Wzór definicyjny ma postać:

$$dl_z = p dv \quad [J/kg]$$

Szukając analogii do fizycznej definicji pracy, łatwo zauważyć, że ciśnienie  $p$  jest proporcjonalne do wartości działającej siły a zmiana objętości właściwej jest wprost proporcjonalna do przemieszczenia (drogi).

### E. Entalpia właściwa

Jest to suma energii wewnętrznej i iloczynu ciśnienia i objętości właściwej . Iloczyn ten ma sens pracy dla 1 kg czynnika (zwany jest czasami pracą przetłaczania):

$$i = u + p v \quad [J/kg]$$

Przykładowe równanie ( **2. postać 1-szej zasady termodynamiki** ) :

$$dq = di - v dp \quad [J/kg]$$

### F. Tabelaryczne ujęcie podstawowych parametrów

Istnieje umowa, że małymi literami oznacza się parametry odnoszące się do jednostki masy ( 1kg). Poniższa tabela przedstawia (wybiórczo!) najczęściej stosowane pojęcia i parametry niezbędne do matematycznego opisu procesów termodynamicznych.

| Symbol                   | Nazwa parametru (pojęcia)                    | Jednostka             | Przykłady zależności                  |
|--------------------------|----------------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|
| <b>q</b>                 | ciepło                                       | J/ kg                 | $dq = du + dl_z$                      |
| <b>u</b>                 | energia wewnętrzna (małe u, więc dla 1 kg)   | J/ kg                 | $du = c_v dT$ (definicja)             |
| <b>c<sub>v</sub></b>     | ciepło właściwe przy stałej objętości        | J/(kg K)              | $R_i = c_p - c_v$                     |
| <b>l<sub>z</sub></b>     | praca zewnętrzna ( małe l , więc dla 1kg)    | J/ kg                 | $dl_z = - p dv$ , $dq = du + dl_z$    |
| <b>l<sub>t</sub></b>     | praca techniczna ( małe l , więc dla 1kg)    | J/ kg                 | $dl_t = - v dp$ , $dq = di + dl_t$    |
| <b>v</b>                 | objętość właściwa ( czytaj 'fał')            | $m^3/kg$              | $v = 1/\rho = V/m$ (definicja)        |
| <b>i</b>                 | entalpia właściwa ( małe 'i' , więc dla 1kg) | J/ kg                 | $i = u + p v$ (definicja)             |
| <b>p</b>                 | ciśnienie                                    | Pa= N/ m <sup>2</sup> | $p = \rho R T$                        |
| <b>R<sub>i</sub> , R</b> | stała gazowa indywidualna                    | J/(kg K)              | $p v = R T$ ( $R \equiv R_i$ )        |
| <b>R<sub>u</sub></b>     | stała gazowa uniwersalna                     | J/ (kmol K)           | $R = R_u/M$ , $R_u = 8315 J/(kmol K)$ |
| <b>M</b>                 | masa molowa                                  | kg/kmol **            | $R = R_u/M$                           |
| <b>V</b>                 | objętość                                     | $m^3$                 | $\rho = m/ V$ (definicja)             |

|                          |                       |                        |                                   |
|--------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------------------|
| <b>m</b>                 | masa                  | kg                     | $\rho = m/V$                      |
| <b><math>\rho</math></b> | gęstość (czytaj 'ro') | $\text{kg}/\text{m}^3$ | $p = \rho R T$ [ Pa ]             |
| <b>k</b>                 | wykładnik adiabaty    | -                      | $k = c_p / c_v$ , $c_v = R/(k-1)$ |

\* w chemii oznacza się najczęściej przez 'h'

\*\* mimo, że zgodnie z układem jednostek SI jednostką ilości substancji (obok kg) jest mol, w obliczeniach bardziej wygodna jest jednostka większa czyli kmol.

## 18. 2. Pierwsza zasada termodynamiki

Pierwsza zasada termodynamiki posiada kilka równoważnych sformułowań.

Najczęściej używa się sformułowania:

Ciepło doprowadzone z zewnątrz do nieruchomego układu zamkniętego jest zużywane na zmianę jego energii wewnętrznej oraz wykonanie pracy zewnętrznej (pracy nad siłami zewnętrznymi). W układzie zamkniętym nie zachodzi wymiana substancji. Ciepło to jest więc algebraiczną sumą zmiany energii wewnętrznej i pracy zewnętrznej. Dla 1 kg czynnika (gazu) wyraża to zależność:

$$dq = du + dl_z, \quad [\text{J}/\text{kg}]$$

W powyższym równaniu mamy:

$du = c_v dT$  - zmiana energii wewnętrznej oraz

$dl_z = p dv$  - wartość pracy zewnętrznej.

Pierwsza zasada termodynamiki przyjmuje różne postacie uproszczone dla konkretnych przemian termodynamicznych. Przykładowo:

- dla przemiany izotermicznej (stała temperatura, czyli  $dT = 0$ ) zerową wartość przyjmuje zmiana energii wewnętrznej, czyli  $dq = dl_z$ ,
- dla przemiany izochorycznej (stała objętość właściwa,  $dv = 0$ ) zerową wartość przyjmuje wartość pracy zewnętrznej, czyli  $dq = du$ ,
- dla przemiany adiabatycznej (brak doprowadzonego ciepła, czyli  $dq = 0$ ) zerową wartość przyjmuje lewa strona ogólnego równania, czyli  $du + dl_z = 0$ .

Uwaga: zapis I zasady termodynamiki w podręcznikach do fizyki jest inny, co wynika z odmiennej umowy odnośnie do znaku pracy.

Wprowadzając pojęcie entalpii  $i = u + p v$  ( $u = i - p v$ ), pierwszą zasadę termodynamiki można łatwo przekształcić do tzw. „drugiej postaci”:

$$dq = di + dl_t,$$

gdzie  $dl_t$  jest tzw. pracą techniczną równą:

$$dl_t = -v dp.$$

Poniżej zostanie przedstawiony matematyczny opis przemiany adiabatycznej (brak wymiany ciepła z otoczeniem). Należy zauważyć, że istnieje metoda modyfikacji podstawowych zależności uzyskanych dla adiabaty w celu uzyskania równań adekwatnych dla procesu przemiany izotermicznej. W pewnych przypadkach, przekształcając zależność dotyczącą przemiany adiabatycznej, poprzez przyjęcie wykładnika adiabaty  $k$  równego 1, uzyskuje się poprawne równanie opisujące proces izotermiczny (np.  $p v^k = \text{const}$   $\rightarrow$   $p v = \text{const}$ ). Dotyczy to przykładowo:

- ogólnej postaci równania przemiany (równ. 4),
- niektórych różniczkowych postaci równania przemiany (równ. 3a),
- stosunku wartości pracy zewnętrznej i technicznej (równ. 8b).

### 18.3. Matematyczno-fizyczny opis przemiany adiabatycznej.

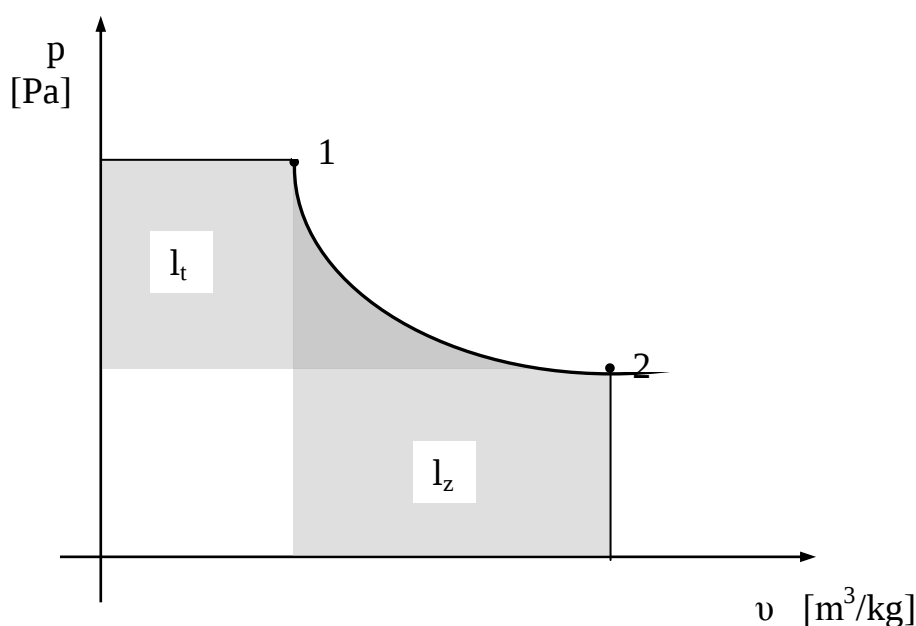
Adiabatą nazywamy przemianę, w której warunkiem koniecznym jest brak wymiany ciepła z otoczeniem. Jest to możliwe wówczas, gdy podczas tej przemiany ani ciepła nie doprowadzamy, ani też go nie odprowadzamy. Ponieważ  $q = \text{const}$  (lub  $Q = \text{const}$ ,  $dq = 0$ ) wartość różniczkowego ciepła przemiany adiabatycznej wyniesie:

$$dq=0$$

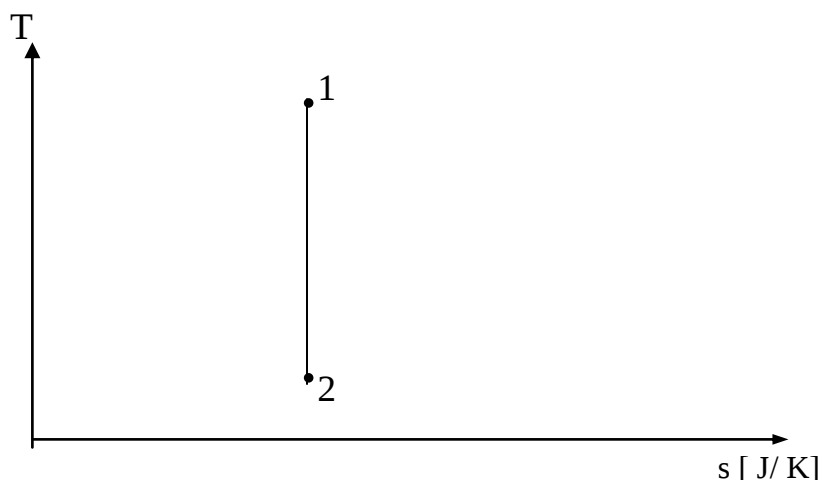
Jedyną przemianą gazową, która może być (czasem) odwracalna jest przemiana adiabatyczna. W tym przypadku musi ona spełnić tzw. warunek braku przyrostu entropii

$$ds = \frac{dq}{T} = 0$$

Całkowanie równania (1) pozwala stwierdzić niezmiennosc entropii ( $S_1 = S_2$ ). Dlatego też odwracalna przemiana adiabatyczna bywa nazywana przemianą izentropową lub ściślej przemianą adiabatyczno-izentropową. Przebieg przemiany przedstawiony jest na rys. 1 w układzie  $p - v$ , zwanym układem pracy, a na rys. 2 w układzie ciepła ( $T - s$ ).



Rys. 1. Przemiana adiabatyczna w układzie pracy  
(ciemne pole to obszar wspólny dla pracy zewnętrznej i technicznej)



Rys. 2. Wykres adiabaty w układzie ciepła (układ T- s).

Podstawą analitycznego ujęcia przebiegu przemiany adiabatyczno-izentropowej jest pierwsza zasada termodynamiki sformułowana w 1842 r. przez J. R. Mayera ( uściślona 5 lat później przez H. de Helmholtza). Poniżej wyprowadzimy pierwszy wariant równania adiabaty przy założeniu, że opis przemiany wyrazimy za pomocą współrzędnych  $p - v$ .

Z równania I zasady termodynamiki (tzw. postać pierwsza) i warunku cieplnego przemiany ( $dq = 0$ ) wynika:

$$dq = du + dl_z = 0 \quad (1)$$

gdzie:

- $dq$  elementarne ciepło przemiany [J/kg],
- $du = c_v dT$  - różniczkowy przyrost energii wewnętrznej [J/kg],
- $dl_z = p dv$  - elementarna praca zewnętrzna [ J/ kg],
- $p$  - ciśnienie [ Pa = N/ m<sup>2</sup>],
- $v$  - objętość właściwa równa  $v = V/m$ , [m<sup>3</sup> / kg],
- $V, m$  - objętość [m<sup>3</sup>] i masa gazu [kg]

Ponieważ  $du = c_v dT$ , więc

$$c_v dT + p dv = 0.$$

Równanie stanu gazu doskonałego (wariant chemiczny wykorzystuje uniwersalną stałą gazową a wersja techniczna - indywidualną stałą gazową  $R_i = R$ ) ma postać:

$$p v = R T \quad [ J/ kg ], \quad (2)$$

$R$  – indywidualna stała gazowa [ J/(kg K) ],  
 $T$  – temperatura bezwzględna [ K ].

Powyższe równanie pozwala – po zróźniczkowaniu - wyznaczyć:

$$dT = d(p v)/R, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{c_v}{R} (p dv + v dp) + p dv = 0 \quad (2a)$$

Indywidualna stała gazowa [ J/( kg K)] może być ujęta tzw. wzorem Mayera:

Termodynamika technika ciepła & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

$$R = c_p - c_v, \quad \text{więc}$$

$$\frac{c_v}{R} = \frac{c_v}{c_p - c_v} = \frac{1}{k-1} \quad (3)$$

Stosunek  $k = \frac{c_p}{c_v}$  jest tzw. wykładnikiem przemiany adiabatycznej ( w równaniu końcowym wystąpi jako wykładnik potęgi w członie z objętością właściwą).

Podstawiając wyrażenie (3) do równania (2a) otrzymuje się:

$$\frac{1}{k-1} (p \, dv + v \, dp) + p \, dv = 0.$$

Mnożąc obie strony równania przez (k-1) uzyskujemy po redukcji wyrazów podobnych :

$$k p \, dv + v \, dp = 0$$

Dzieląc obie strony równania przez iloczyn  $p \cdot v$  otrzymamy równanie różniczkowe adiabaty:

$$k \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (3a)$$

Jego całkowanie prowadzi do wyniku

$$k \ln \frac{v_2}{v_1} + \ln \frac{p_2}{p_1} = 0,$$

i po przekształceniu otrzymamy postać podstawową:

$$p_1 \cdot v_1^k = p_2 \cdot v_2^k, \quad (4)$$

co stanowi równanie adiabaty-izentropy w układzie  $p - v$  ( tzw. układ pracy).

Krzywe ilustrujące przemianę adiabatyczną przedstawione zostały na rys. 1, 2.

Równanie adiabaty możemy przedstawić również w postaciach odmiennych od równania (3), uwzględniających zmianę trzeciego czynnika czyli temperatury. W tym celu zależność (3) zapiszemy w postaci ogólnej, wykorzystując równanie stanu:

$$p \cdot v^k = \frac{RT}{v} v^k = p \left( \frac{RT}{p} \right)^k = \text{const} \quad (5)$$

Z ogólnej postaci równania adiabaty (4) można uzyskać następujące zależności:

a) zmienność objętości właściwej i temperatury:

$$T v^{k-1} = \text{const}, \quad \text{lub} \quad T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_2^{k-1} \quad (6)$$

b) zmienność ciśnienia i temperatury:

$$T^k p^{1-k} = \text{const}, \quad \text{lub} \quad T_1^k p_1^{1-k} = T_2^k p_2^{1-k} \quad (7)$$

Równanie (6) może być podstawą do przewidywania kierunku zmiany temperatury przy sprężaniu (spadek objętości właściwej i wzrost temperatury) i rozprężaniu gazu (odwrotnie).

Pracę zewnętrzną oblicza się z pierwszej zasady termodynamiki, czyli:

$$dq = du + dl_z = 0$$

Skąd wynika:

$$dl_z = - du$$

a po scałkowaniu otrzymujemy:

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

$$l_z = u_1 - u_2 \quad (8)$$

A więc praca zewnętrzna zostaje wykonana kosztem spadku energii wewnętrznej. Wyrażenie (6) można jeszcze przekształcić do postaci:

$$l_z = c_v (T_1 - T_2).$$

Ponieważ  $c_p - c_v = R$  oraz  $c_p / c_v = k$ , więc  $c_v = R / (k - 1)$ , i następnie

$$l_z = \frac{1}{k-1} R (T_1 - T_2) = \frac{1}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \quad (8a)$$

Praca techniczna występuje w drugiej postaci I zasady termodynamiki, czyli można ją obliczyć analogicznie do pracy zewnętrznej. Ponieważ :

$$dq = di + dl_t = 0$$

czyli

$$dl_t = - di;$$

oraz

$$l_t = i_1 - i_2$$

Jak z powyższego wynika warunkiem wykonania pracy technicznej jest spadek entalpii właściwej [ J/ kg], czyli jest ona wykonana kosztem tego spadku.

Między pracą techniczną i zewnętrzną zachodzi następująca zależność:

$$\frac{l_t}{l_z} = \frac{i_1 - i_2}{u_1 - u_2} = \frac{c_p (T_1 - T_2)}{c_v (T_1 - T_2)} = \frac{c_p}{c_v} = k,$$

$$\text{.czyli:} \quad l_t = k l_z \quad (8b)$$

Korzystając z równania (3) i równania stanu gazu (2) otrzymujemy:

$$l_t = \frac{k}{k-1} R (T_1 - T_2) = \frac{k}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \quad (9)$$

#### **18.4. Wybrane metody oznaczania wykładnika adiabaty**

W dalszych rozważaniach rozpatrzemy dwie metody oznaczenia wykładnika adiabaty:

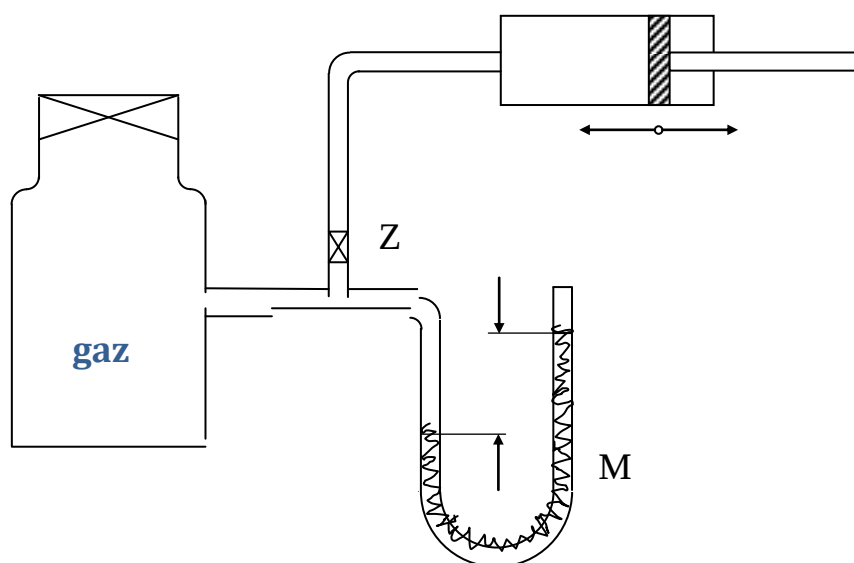
- a) metoda Clementa-Desormesa,
- b) metoda Lummera-Pringsheima.

Pierwsza metoda wymaga prowadzenia pomiaru przy stosowaniu małych nadciśnień gazu, podczas gdy w drugiej ograniczenie to nie występuje. Obie metody wykorzystują matematyczny opis przemiany adiabatycznej w odniesieniu do zmienności ciśnienia, z czego wynika, że podstawowym przyrządem pomiarowym jest manometr cieczowy.

Opisane niżej doświadczenie spełnia założenie przebiegu przemiany przy małych ciśnieniach ( nadciśnieniach) czyli szukana wartość wykładnika adiabaty może być uzyskana za pomocą procedur obliczeniowych opisujących obie z wymienionych metod.

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 3.

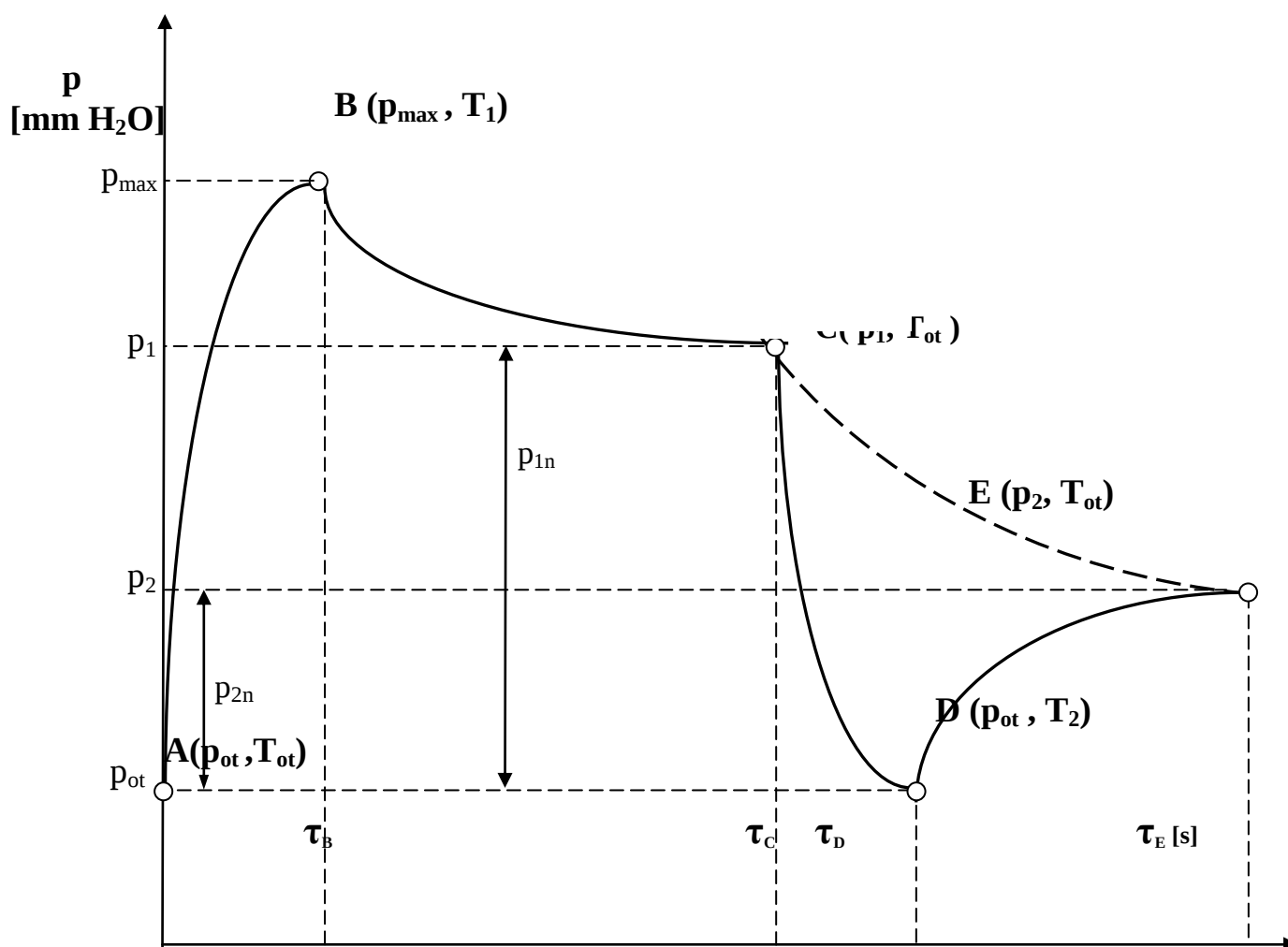


Rys. 3. Schemat układu pomiarowego ( N – naczynie z badanym gazem, M – mikromanometr cieczowy, Z – zawór szklany obrotowy, P – pompka sportowa,

Badany gaz ( np. powietrze) znajduje się w zamkniętym naczyniu laboratoryjnym. Pierwszy etap pomiaru polega na wtłoczeniu do naczynia niewielkiej ilości tego samego gazu za pomocą pompki sportowej, co powoduje (obserwowany) wzrost jego ciśnienia np. o ok. 100 mm  $H_2O$  ( jest to niewielka wartość nadciśnienia, łatwa do pomiaru dowolnym manometrem cieczowym). Sprężanie gazu powoduje wzrost jego temperatury, przy czym z uwagi na krótki czas jego trwania możemy go traktować jako proces adiabatyczny (założenie to nie ma związku a dokładnością dalszych obliczeń) . Kolejnym etapem, zachodzącym samoistnie, jest izochoryczne oziębianie gazu, zakończone po uzyskaniu zrównania jego temperatury z otoczeniem. Ten etap ( drugi) kończy wstępną część eksperymentu, przy czym jej przebieg ma znikomy wpływ na dokładność części obliczeniowej. Dowodem zakończenia tej przemiany jest stabilizacja wskazań manometru.

Badany gaz posiada w tym momencie pewne nadciśnienie. Otwarcie zaworu Z ( rys. 3), powoduje wypuszczenie z naczynia pewnej ilości gazu i jego rozprężenie. Zawór zamykamy w momencie zrównania ciśnienia gazu w naczyniu z wartością ciśnienia otoczenia.

Proces ten trwa ułamek sekundy, co pozwala założyć, że zachodzi on w sposób adiabatyczny. Adiabatycznemu rozprężaniu towarzyszy oziębianie badanego gazu poniżej temperatury otoczenia .



Rys. 4. Krzywa zmiany ciśnienia badanego gazu jako podstawa podziału procesu pomiarowego na 4 etapy (AB - adiabata, BC – izochora, CD – adiabata, DE – izochora, CE – teoretyczna izoterma).

W związku z różnicą temperatur gazu w naczyniu i otoczeniu następuje samoistne izochoryczne podgrzewanie gazu do momentu wyrównania temperatur, czemu towarzyszy wzrost ciśnienia ( $p/T = \text{const}$ ). Wartość tego wzrostu  $\Delta p_2$  (rys. 4) jest zawsze mniejsza w porównaniu z ciśnieniem początkowym etapu adiabatycznego ( $\Delta p_2 < \Delta p_1$ ), co można wyjaśnić zmniejszeniem masy gazu po otwarciu zaworu w 3. etapie eksperymentu. Przebieg obu procesów adiabatycznych dowodzi, że adiabatyczne sprężanie (linia AB) pociąga za sobą wzrost temperatury gazu, podczas gdy rozprężaniu (CD) towarzyszy spadek temperatury, przy wzroście objętości właściwej zgodnie z równaniem (6).

Zauważając, że dwa ostatnie etapy eksperymentu (adiabata połączona z izochorą) odpowiadają przemianom izotermicznym a etap przedostatni – adiabatycznej, należy opisać te procesy z punktu widzenia mierzonych zmian ciśnienia (nadciśnienia).

W obliczeniach tych niezbędna jest znajomość podstawowej zależności definicyjnej nadciśnienia:

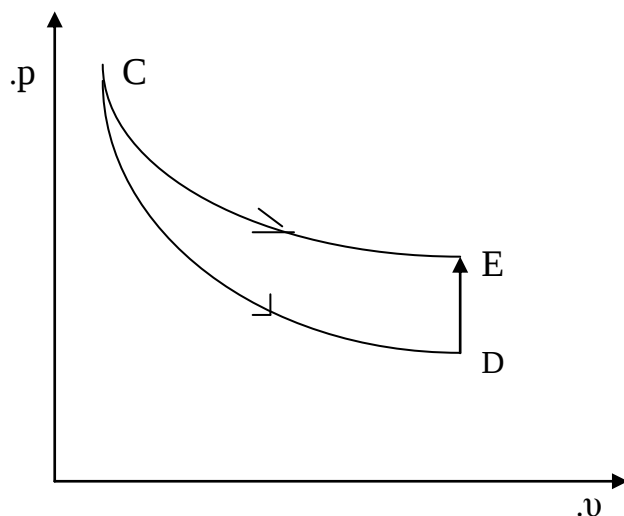
$$p_n = p - p_{ot}$$

gdzie:  $p_n$  - nadciśnienie mierzone manometrem (cieczowym z rurką pochyłą),

$p$  - ciśnienie bezwzględne,

$p_{ot}$  - ciśnienie barometryczne.

Poniższy - bardzo ważny - schemat przedstawia przebieg przeprowadzonych przemian tj. : adiabaty, izochory i izotermę ( wg CD, DE, CE ) w układzie  $p - v$  .



Podstawowe zależności opisujące ideę obu metod zostaną opisane poniżej.

#### 18. 4. 1. Teoretyczne podstawy obliczania $c_p/c_v$ metodą Clementa

Do dalszych rozważań niezbędne jest wyrażenie związków pomiędzy ciśnieniem i objętością gazu w trakcie procesów adiabatycznego i izotermicznego.

Dla procesu adiabatycznego skorzystamy z następujących zależności:

$$p v^k = \text{const} = c ;$$

$$p = \frac{c}{v^k} ; \quad \frac{dp}{dv} = \frac{-ck}{v^{k+1}} ; \quad \frac{dp}{dv} = \frac{-p v^k k}{v^k v} ;$$

$$\frac{dp}{dv} = -k \frac{p}{v} \quad (10)$$

Równanie izotermi możemy uzyskać jako szczególny przypadek adiabaty dla  $k = 1$ , czyli dla przemiany izotermicznej zachodzi związek :

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v} \quad (11)$$

Wzory (1), (2) w odniesieniu do małej zmiany objętości właściwej  $\Delta v$  i ciśnienia  $\Delta p$  można zapisać następująco:

a) dla adiabaty:

$$\frac{\Delta p_{ad}}{\Delta v} = -k \frac{p}{v} \quad (12)$$

b) dla izotermi:

$$\frac{\Delta p_{iz}}{\Delta v} = -\frac{p}{v} \quad (13)$$

Ponieważ  $\Delta p_{ad} = p_{ot} - p_1$  więc:

$$\Delta p_{ad} = -p_{1n} \quad \text{ i } \quad \Delta p_{iz} = p_2 - p_1 = p_{2n} - p_{1n}$$

po podzieleniu stronami równań (12) i (13) otrzymamy :

$$\Delta p_{ad} / \Delta p_{iz} = k = -p_{1n} / (p_2 - p_1) = \frac{p_1 - p_{ot}}{p_1 - p_2}$$

$$k = \frac{p_{1n}}{p_1 - p_2} = \frac{p_{1n}}{p_{1n} - p_{2n}}$$

gdzie:

$p_1, p_2$  - ciśnienia bezwzględne dla punktów pomiarowych 1, 2,  
 $p_{1n} = p_1 - p_{ot}$  - nadciśnienie dla punktu 1

#### 18. 4. 2. Metoda Lummera – Pringsheima

W szczególnym, najprostszym przypadku przebieg badania może być analogiczny do doświadczenia Clementa-Desormesa. Postać zależności opisującej szukany wykładnik  $k$ , wynika z następujących przekształceń równania adiabaty:

$$p v^k = const \quad \text{lub} \quad p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$

Po zlogarytmowaniu mamy:

$$k \ln \frac{v_1}{v_2} = \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (14)$$

Z równania stanu gazu doskonałego  $\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2}$  obliczymy

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} \frac{p_2}{p_1} \quad (15)$$

Połączenie zależności (14) i (15) pozwala ująć szukany współczynnik  $k$  wzorem:

$$k = \frac{\ln(p_2 / p_1)}{\ln(T_1 p_2 / p_1 T_2)} \quad (16)$$

Zgodnie z przebiegiem termodynamicznych etapów doświadczenia [  $p = f(\tau)$  - rys. 4] punkty temperatury początku (indeks 1) i końca (indeks 2) przemiany adiabatycznej odpowiadają temperaturze otoczenia  $T_1 = T_{ot}$  (mierzona temperatura powietrza w sali laboratoryjnej) i nieznanej temperaturze końca tej przemiany  $T_2 = T_{ad}$ . Zależność (16) zapiszemy więc w postaci:

$$k = \frac{\ln(p_{ot} / p_1)}{\ln\left(\frac{p_{ot}}{p_1} \frac{T_{ot}}{T_{ad}}\right)} \quad (17)$$

Zależność (17) wyraża metodą Lummera- Pringsheima.

Nieznana temperatura końca etapu adiabaty  $T_{ad}$  jest temperaturą początku przemiany izochorycznej (etap IV) zakończonej w momencie uzyskania temperatury otoczenia. Początek izochory odpowiada ciśnieniu otoczenia  $p_{ot}$  a wskutek pobierania ciepła z otoczenia rośnie ono do wartości  $p_2$  (mierzone manometrem jako  $p_{2n}$ ). Tak więc równanie izochory ( $p/T = const$ ) pozwala na zastąpienie wartości temperatur za pomocą ciśnień:

$$\frac{p_{ot}}{T_{ad}} = \frac{p_2}{T_{ot}} \Rightarrow \frac{T_{ot}}{T_{ad}} = \frac{p_2}{p_{ot}}$$

Podstawiając wartość  $T_{ot} / T_{ad}$  do (17) otrzymamy wzór końcowy w postaci:

$$k = \frac{\ln(p_{ot} / p_1)}{\ln\left(\frac{p_{ot} \cdot p_2}{p_1 \cdot p_{ot}}\right)} = \frac{\ln \frac{p_{ot}}{p_1}}{\ln \frac{p_2}{p_1}} \quad (18)$$

### 18. 5. Termodynamiczne etapy zastosowanej metody doświadczalnej

Kolejność czynności pomiarowych przy oznaczaniu wykładnika adiabaty  $k$  ( $c_p / c_v$ ) przedstawiać można w postaci następujących przemian termodynamicznych:

- 1) adiabatyczne sprężenie próbki gazu od  $p_{ot}$  do  $p_{max}$  poprzez wtłoczenie do naczynia niewielkiej ilości gazu za pomocą pompki (wzrost ciśnienia i temperatury – rys. 4);
- 2) samoistne, izochoryczne rozprężanie i stygnięcie gazu w wyniku odprowadzania ciepła do otoczenia, zanikające w momencie wyrównania temperatury gazu i otoczenia,
- 3) adiabatyczne rozprężanie wskutek „połączenia” wnętrza naczynia z otoczeniem poprzez krótkotrwałe otwarcie zaworu (ochładzanie gazu);
- 4) samoistne, izochoryczne sprężanie gazu (po zamknięciu zaworu) - przy asymptotycznym przebiegu wzrostu ciśnienia – wymuszone pobieraniem ciepła od otoczenia; przemiana kończy się w momencie osiągnięcia stanu termodynamicznej równowagi (wyrównanie temperatury gazu i otoczenia, ustalenie wartości końcowego ciśnienia).

Temperatura początku etapu 3. jest równa temperaturze zakończenia etapu 4. Pozwala to na wprowadzenie do obliczeń końcowych pojęcia wirtualnej izotermy, odnoszącej parametry początku etapu 3 i końca etapu 4.

### 18. 6. Przykłady obliczeniowe

Założmy, że podczas badań zmienności ciśnienia (mikromanometr) w uzyskano następujące wartości nadciśnienia gazu (powietrza) :

$$p_{ln} = 90 \text{ mm H}_2\text{O} \text{ i } p_{zn} = 25 \text{ mm H}_2\text{O} .$$

Wg metody Clementa (dla małych nadciśnień)

$$k_1 = \frac{p_{ln}}{p_1 - p_2} = \frac{90}{90 + p_{ot} - 25 - p_{ot}}$$

$$k_1 = 90 / 65 = 1.3846$$

Zgodnie z metodą Lummera ( $p_{ot} = 750 \text{ Tr}$ ) :

$$k_2 = \frac{\ln(p_{ot} / p_1)}{\ln(p_2 / p_1)} , \quad p_{ot} = 750 \text{ Tr} = 750 \cdot 13.6 \text{ mm H}_2\text{O} = 10\,200 \text{ mm H}_2\text{O}$$

$$k_2 = \frac{\ln[10\,200/(10\,200+90)]}{\ln[(10\,200+25)/(10\,200+90)]} = 1,3862$$

Z porównania wartości  $k_1$  i  $k_2$  wynika bardzo dobra zgodność obu metod dla małych nadciśnień używanych w doświadczeniu.

Ponieważ wzór ścisły dotyczy wartości  $k_2$  więc błąd względny wynosi :

$$\frac{1,3862 - 1,3846}{1,3862} \cdot 100 = 0,12\%$$

Dla małych wartości  $p_{\text{in}} / p_{\text{ot}} \ll 1$  mamy

$$\ln(p_{\text{ot}} / p_1) = -\ln(1 + p_{\text{in}} / p_{\text{ot}}) \approx -p_{\text{in}} / p_{\text{ot}}$$

oraz

$$\ln(p_2 / p_1) = \ln\left(1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}\right) \approx \frac{p_2 - p_1}{p_{\text{ot}} + p_{\text{in}}}$$

Wtedy uproszczony wzór ma postać:

$$k_2 = -\frac{p_{\text{in}}}{p_{\text{ot}}} \cdot \frac{p_{\text{ot}} + p_{\text{in}}}{p_2 - p_1} = \frac{p_{\text{in}}}{p_1 - p_2} \left(1 + \frac{p_{\text{in}}}{p_{\text{ot}}}\right) \approx \frac{p_{\text{in}}}{p_1 - p_2}.$$

Matematyczna postać powyższej zależności wyjaśnia równoważność obu metod oznaczania wartości wykładnika adiabaty  $k$  przy zastosowaniu metody małych ciśnień.

### 18. 7. Literatura

1. B. Staniszewski: Termodynamika. PWN, 1986.
2. S. Wiśniewski: Termodynamika Techniczna, WNT, W-wa 1987.
4. Sz. Szczeniowski: Fizyka doświadczalna. Cz. II. Ciepło i fizyka drobinowa. PWN, W-wa, 1964.
5. F. Kohlrausch: Fizyka laboratoryjna. PWN, W-wa 1959.

(TTT43)

### 18. 8. Arkusz obliczeniowy do ćwiczeń laboratoryjnych

| Imię | Nazwisko | Data     | Rok II. | Grupa | 43ss |
|------|----------|----------|---------|-------|------|
|      |          | .05.2012 | 1       | 2 3   |      |

Sprawozdanie z ćwiczenia laboratoryjnego nr 3

$Z_7 =$

Badanie parametrów przemiany izotermicznej i adiabatycznej na przykładzie powietrza

1. Dane ogólne dla badanego gazu (powietrze wilgotne \*):

Termodynamika technika ciepła & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

$p_b = p_{ot} = \dots \text{hPa}$ ;  $p_{1n} = \dots \text{mm H}_2\text{O}$ ;  $p_{2n} = \dots \text{mm H}_2\text{O}$   
 $t_{ot} = 18-25 \dots ^\circ\text{C}$ ;  $c_{p,pow} = 1023 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ;  $R_{pow} = 287 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$

2. Obliczenie wykładnika  $k$  metodą Clementa (metoda małych ciśnień)

a) obliczenie  $p_1$  i  $p_2$  (należy dopasować jednostki składników równania)

$$p_1 = p_{ot} + p_{1n} = \dots + \dots = \dots [\text{Pa}]$$

$$p_2 = p_{ot} + p_{2n} = \dots + \dots = \dots [\text{Pa}]$$

b) obliczenie  $k$

$$k = \frac{p_{1n}}{p_1 - p_2} = \frac{\dots}{\dots - \dots} = \dots \text{ podaj jednostkę : } \boxed{\phantom{000000}}$$

3. Obliczenie wykładnika  $k$  metodą Lummera (dowolne ciśnienie)

$$k = \frac{\ln(p_{ot}/p_1)}{\ln(p_2/p_1)} = \frac{\ln(\dots/\dots)}{\ln(\dots/\dots)}; \quad k = \dots \text{ (4 miejsca znaczn. np. 1,342)}$$

4. Określenie temperatury końca przemiany adiabatycznej (etap III) jako początku izochorycznego sprężania gazu przy pobieraniu ciepła z otoczenia (IV etap eksperymentu)

$$T_1 = T_{ot} = \dots \text{ K}; \quad T_2 = \frac{p_{ot} \cdot T_{ot}}{p_2} = \frac{\dots \cdot \dots}{\dots} = \dots \text{ K}$$

5. Obliczenie ciepła właściwego  $c_{v,pow}$  i przyrostu energii wewnętrznej

$$c_{v,pow} = c_{p,pow} - R_{pow} = \dots [\text{J/(kg} \cdot \text{K)}] \text{ (równanie Mayera)}$$

$$\Delta u = \dots (T_2 - T_1) = \dots (\dots - \dots) = \dots [\text{J/kg}]$$

6. Obliczenie pracy zewnętrznej (podaj wzór !)

$$l_z = \dots [\text{J/kg}]$$

7. Obliczenie pracy technicznej i zmiany entalpii (wzór !)

$$l_t = \dots [\text{J/kg}]; \quad \Delta i = \dots = \dots [\text{J/kg}]$$

8. Teoretyczna wartość wykładnika adiabaty dla powietrza

$$k_{teor} = c_{p,pow}/c_{v,pow} = \dots / \dots = \dots$$

9. Obliczenie objętości właściwych dla badanej adiabaty (na odwrocie)

$$10. \text{ Współczynnik weryfikacyjny } Z_7 = \frac{\Delta u + l_z - \Delta i}{l_t} = \frac{\dots + \dots - \dots}{\dots} = \dots$$

Jeżeli  $Z_7$  nie mieści się w granicach  $0.95 \div 1.05$ , to obliczenia należy powtórzyć.

Na odwrocie: wspólny wykres adiabaty (CD), izochory (DE) i wirtualnej izoterm (CE) w układzie pracy  $p - v$  (po obliczeniu objętości właściwych  $v_1$  i  $v_2$ ), wnioski.

Liczba innych osób posiadających takie same wyniki lub/i wnioski wynosi: ..... (0 – 15)

\* uwaga: indeks 'pow' oznacza powietrze

\*\* wersja W43sss (maj 2012)

### \* CZĘŚĆ III

## 19. Wymiana ciepła przy wymuszonym przepływie w kanałach okrągłych

### 19. 1. Wprowadzenie

Pracochłonne badania wielu autorów pozwoliły na sformułowanie podstawowych liczb podobieństwa (kryteriów) opisujących ten proces w oparciu o liczbę Nusselta.. Główne kryteria to:

a) kryterium Nusselta:  $Nu = \alpha \cdot \frac{d_e}{\lambda_m}$

b) Kryterium Reynoldsa:  $Re = w \frac{d_e}{\nu_m} = G \frac{d_e}{F \mu_m}$

c) Kryterium Prandtla:  $Pr = \frac{\nu_m}{a_m}$

d) kryterium Grashofa:  $Gr = \beta_m \nu_m^{-2} g d_e^3 \Delta T$

$\alpha$  - współczynnik przejmowania ciepła,

$d_e$  - charakterystyczny (ekwiwalentny) wymiar liniowy ciała, [m],

$\lambda_m$  - współczynnik przewodzenia ciepła płynu, W/ (m K), dla temperatury średniej płynu w kanale  $T_f$  (średnia arytmetyczna),

$w$  - średnia prędkość liniowa płynu w kanale, m/s

$\nu_m$  - lepkość kinematyczna płynu, [m<sup>2</sup>/ s],

$G$  - masowe natężenie przepływu płynu przez kanał, kg/ s,

$F$  - pole powierzchni przekroju kanału, m<sup>2</sup>,

$a_m$  - współczynnik wyrównywania temperatury medium, [m<sup>2</sup>/ s],

$\mu_m$  - lepkość dynamiczna płynu, ( $\mu_m = \rho \nu_m$ ), [m<sup>2</sup>/ s],

$\rho_m$  - gęstość płynu, kg/ m<sup>3</sup>,

$\beta_m$  - współczynnik rozszerzalności objętościowej płynu, [K<sup>-1</sup>], równa dla gazów :

$$\beta = \frac{1}{(T + 273)}$$

Ogólne równanie można zapisać :

$$Nu = C \cdot Re^{n_1} Pr^{n_2} Gr^{n_3} (d/L)^{n_4} (\mu_m / \mu_w)^{n_5}$$

gdzie :  $C, n_1, n_2, n_3, n_4$  - stałe (współczynniki),

Indeksy:  $m$  - wartość dla płynu,  $w$  - wartość dla temperatury powierzchni kontaktu ( $w$  od wall - ścianka).

.. -----

#### Literatura

1. B. Staniszewski : Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne. PWN. W-wa 1979 , s. 304

2. S. Wiśniewski, T. Wiśniewski : Wymiana ciepła. WNT. W-wa 1994, s. 278.

Wzory do kopiowania:  $Gr = \beta_m \nu_m^{-2} g d_e^3 \Delta T$  - kryterium Grashofa,

$$Pr = \frac{\nu_m}{a_m} \quad \text{- kryterium Prandtla,} \quad \text{Liczba Stanton} \quad St = Nu/ Pe$$

Wzór Hansena dla ruchu przejściowego – Staniszewski s. 244

## 19. 2. Przykład obliczeniowy ( K1 )

[Turbulentny ruch w kanale prostokątnym  $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$  wg wykładu ]

(Ruch Laminarny => Staniszewski. s. 229, ruch przejściowy s. 244, ruch burzliwy – Stanisz s.245)

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

Rurą o średnicy wewnętrznej  $d = 10 \text{ mm}$  przepływa olej ogrzewany za pomocą pary wodnej. Temperatura oleju na wlocie do rury  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ , temperatura ścianki rury

$T_w = 100^\circ\text{C}$ . Masowe natężenie przepływu oleju  $m^*$  wynosi  $m^* = 150 \text{ kg/h} = 0,0417 \text{ kg/s}$ .

**Zakładając długość kanału  $L$  równą 4m obliczyć przyrost temperatury oleju na drodze wlot – wylot.** Potrzebne dane przyjąć z tablic dla średniej temperatury oleju  $T_{sr}$ .

Rozszerzalności liniowe oleju maszynowego (MS-20, wg Wiśn.) wynosi :

a)  $\beta_p(20) = 6,69 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,

b)  $\beta_p(40) = 6,42 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,

c)  $\beta_p(100) = 6,69 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

Tabela parametrów oleju \*\* Liczba Grashofa, Prandtla

| Ciepło właściwe<br>$c_p$ , | Gęstość Płynu<br>$\rho$ ,<br>$20^\circ\text{C}$ | Współ. przew.<br>$\lambda_m$ | Współ. Beta: $10^5$ ,<br>$20^\circ\text{C}$ | Lepkość kinematyczna, wg Staniszwskiego<br>$10^6 \cdot \nu_m$ , $\text{m}^2/\text{s}$ , |                    |                     |
|----------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------|
|                            |                                                 |                              |                                             | $20^\circ\text{C}$                                                                      | $30^\circ\text{C}$ | $100^\circ\text{C}$ |
| J/ (kg K)                  | kg/ $\text{m}^3$ ,                              | W/(mK)                       | 1/ K                                        | 25 ?                                                                                    | 18 ?               | 3 ?                 |
| 2009                       | 1000                                            | 0,15                         | 63,5                                        | Lepkość wg Wiśniew Olej MS-20                                                           |                    |                     |
|                            |                                                 |                              |                                             | 1125                                                                                    | 526                | 20,3 (e-6)          |

Wyniki zadanie wg Staniszwskiego s. 229 (olej płynie w rurze)

Wg Siedera- Tate'a (lamin.)  $Nu = 1,86(\text{Re Pr } d/L)^{1/3} (\mu_f / \mu_w)^{0,14}$

| Parametr                                                   | Symbol        | Wzór                            | Wynik wg Siedera - Tate'a (L) | Wynik wg Aładiewa (L) |  |
|------------------------------------------------------------|---------------|---------------------------------|-------------------------------|-----------------------|--|
| Średnia temp oleju, $^\circ\text{C}$                       | $T_f$         | $0,5 (T_{f1} + T_{f2})$         | 30 K                          | $T_f = 30$            |  |
| Spadek temp. $\Delta T$                                    | $\Delta T$    | $T_w - T_f$                     | 70 K                          | 70 K                  |  |
| Pow . .przekroju kanału, $\text{m}^2$                      | F             |                                 | 7,85 e-5                      | 7,85 e-5              |  |
| Lepkość kinematyczna                                       | $\nu$         |                                 | $1,8 \cdot 10^{-5}$           | $1,8 \cdot 10^{-5}$   |  |
| Prędkość , m/s                                             | w             |                                 | 0,531                         |                       |  |
| Liczba Reynoldsa                                           | Re            | $d = 0,01$                      | 295                           | 295                   |  |
| Liczba Prandtla                                            | Pr            |                                 | 251                           | 251                   |  |
| Liczba Pecleta                                             | Pe            | $Pe = \text{Re Pr}$             | 73980                         | 73980                 |  |
| Liczba Grashofa                                            | Gr            | $d = 0,01$                      | --                            | 7058                  |  |
| Stosunek $d/L$                                             |               |                                 | 0,00256                       | --                    |  |
| Stosunek $L/d$                                             |               |                                 | --                            | 40                    |  |
| $X_{mi}$ (wg Siedera-Tate'a)<br>(ostatni czynnik wzoru ST) |               | $(\mu_{m30}/\mu_{m100})^{0,14}$ | 1,28                          | --                    |  |
| WPE                                                        |               | $(Pe d/L)^{0,33}$               | 5,74                          | --                    |  |
| $Gr^{0,1}$                                                 |               |                                 | --                            | 1,3                   |  |
| $Nu_{ar}$                                                  | $Nu_{ar}$     | $1,86 WPE \cdot X_{mi}$         | 13,7                          | 15,7                  |  |
| $\alpha_{ar}$                                              | $\alpha_{ar}$ | $Nu \cdot \lambda_m / dk$       | 205,7                         | 235,5                 |  |

|         |  |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|--|
| Qna sek |  |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|--|

Temperaturę szukaną  $T_{f2}$  obliczymy wg bilansu

$$\alpha_{ar} \pi d_o L [T_w - \frac{1}{2} (T_{f1} + T_{f2})] = G c_p (T_{f2} - T_{f1}), \text{ czyli}$$

$$205,7 \pi \cdot 0,01 \cdot 4 [100 - \frac{1}{2} (20 + T_{f2})] = 0,0417 \cdot 2090 (T_{f2} - 20),$$

$$100 - \frac{1}{2} (20 + T_{f2}) = 3,37 T_{f2} - 67,4$$

$$3,87 T_{f2} = 90 + 67,4 = 157,4 \quad \#$$

$$T_{f2} = 157,4 / 3,87 = 40,7 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Druga metoda rozwiązania zadania K1 (wzór Aładiewa)

Zakładamy, że temperatura na końcu walcowego kanału (rury) wyniesie  $40 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Średnia temperatura  $T_m = 0,5 (20 + 40) = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

$\Delta T_G = 70 \text{ K}$

Dla tej temperatury mamy:

- i) lepkość  $\nu_m = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,
- j) współczynnik przewodzenia  $\lambda_m = 0,15 \text{ W/(m K)}$ ,
- k) współczynnik wyrównywania temperatury  $a = 7,17 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$
- l) liczba Prandtla  $Pr = 251$
- m) współczynnik rozszerzalności (z tablic, dla oleju maszynowego)

$$\beta_{20} = 63,5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad \beta_{40} = 64,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Liczba Grashofa

$$Gr = \beta_m \nu_m^{-2} g d_e^3 \Delta T$$

$$Gr = 0,00000635 / (18 \cdot 18 \cdot 10^{-12}) \cdot 9,81 \cdot 0,01^3 \cdot 70$$

$$Gr = 13,5$$

Wzór Aładiewa

$$Nu = 0,74 \cdot Re^{0,2} \cdot Pr^{0,3} \cdot Gr^{0,1} = 15,7$$

$$Nu = \alpha / \lambda_m \cdot d_e, \quad 15,7 = \alpha \cdot 0,01 / 0,15$$

Szukany współczynnik wymiany (przejmowania, Aładiew) ciepła :

$$\alpha_A = 235,5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

Wg Siedera- Tate'a mamy  $Nu = 1,86 (Re Pr d/L)^{1/3} (\mu_f / \mu_w)^{0,14} = 13,7$

$$\alpha_S = 205,7 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

### 19. 3. Zestawienie wybranych równań na liczbę Nusselta dla konwekcji naturalnej i przepływów wymuszonych

| Wzór | Rodzaj ruchu                                      | Równanie                     | Zakres, wymiar charakterystyczny        |
|------|---------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------|
| A    | Konwekcja naturalna w przestrzeni nieograniczonej | $Nu = 1,18 (Gr Pr)^{1/8}$    | $10^{-3} < (Gr Pr) < 5 \cdot 10^2$      |
| B    |                                                   | $Nu = 0,54 (Gr Pr)^{1/4}$    | $5 \cdot 10^2 < (Gr Pr) < 2 \cdot 10^7$ |
| C    |                                                   | $Nu = 0,135 (Gr Pr)^{1/3}$   | $2 \cdot 10^7 < (Gr Pr) < 10^{13}$      |
| D    |                                                   | $Nu = 2 + 0,5 (Gr Pr)^{1/4}$ | $10^2 < (Gr Pr) < 10^6$                 |
| E    | Przepływ laminarny                                | $Nu = 0,5 (Re Pr d/L)^{1/3}$ | $Re Pr d/L < 4,5$ , średnica            |

|    |                                                     |                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                        |
|----|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F  | w rurze o długości L, $Re < 2300$                   | $Nu = 1,62 (Re Pr d/L)^{1/3}$                                                                                                                                          | $Gz = Re Pr d/L > 13$ , średnica                                                                                                                       |
| G  |                                                     | $Nu = 0,74 Re^{0,2} Pr^{0,3} Gr^{0,1}$                                                                                                                                 | $L/d > 50$ , średnica (Aładiew), dla rur poziomych [ 5],<br>Liczba Nu ( $Nu_m$ ) obliczana dla własności wg temp. średnich dla płynu i ścianki         |
| H1 |                                                     | $Nu = 1,86 (Re Pr d/L)^{1/3} (\mu_f / \mu_w)^{0,14}$                                                                                                                   | $Re Pr d/L > 13$ , średnica, f – wg średniej temp. płynu (fluid),<br>w – wg temp. ściany (88all); $Pr < 16700$ , $Gz^{0,5} (\mu_f / \mu_w)^{0,14} > 2$ |
| H2 |                                                     | $Nu = 0,35 Pe^{1/3} (\mu_f / \mu_w)^{0,14}$                                                                                                                            | $Gz > 13$ , $L/d > 150$ , średnica, $Pr < 16700$ ,<br>$Gz^{0,5} (\mu_f / \mu_w)^{0,14} > 2$                                                            |
| I  | Przepływ burzliwy w rurze o długości L, $Re > 10^4$ | $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$                                                                                                                                         | $Re > 10^4$ ; $0,5 < Pr < 25$ , średnica hydrauliczna                                                                                                  |
| J  |                                                     | $Nu = 0,021 Re^{0,8} Pr^{0,43} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}$                                                                                                                   | $10^4 < Re < 5 \cdot 10^5$ ; $L/d > 50$ ; $0,6 < Pr < 2500$ , f – średnia temp. płynu, w – wg temp. ściany                                             |
| K  | Przepływ mieszany $2300 < Re < 10^4$                | Wartość Nu dla ruchu burzliwego z użyciem mnożnika $\psi \leq 1$ np.<br>$\psi = 0,42$ dla $Re = 2500$ , $\psi = 0,88$ dla $Re = 5000$ , $\psi = 1$ dla $Re > 8000$ [6] |                                                                                                                                                        |
| L  | Przepływ mieszany $2300 < Re < 150\,000$            | Wzór Hausena (Stan. .s. 244)                                                                                                                                           |                                                                                                                                                        |

[5] M. A. Michiejew: Osnovy tieplotieriadacz. Gos Energo Izdatielstwo. Moskwa 1949, s. 96.

[6] Praca zbiorowa (J. Kulesza): Pomiary cieplne. WNT W-wa, 1993 (cz. 2, s. 229)

[7] W. Longa: Krzepnięcie odlewów w kokilach. Wyd. Śląsk. Katowice 1978.

$Gz = Re Pr d/L$ , liczba Graetz;  $Pe = Re Pr$

H - wzór Siedera – Tate'a ( [3] Wiśniewski s. 245, wg badań w 1936 r.)

I – wzór Nusselta, J – wzór Michiejewa

Uwaga: wg W. Longi [7] dla ruchu laminarnego można stosować równanie:

$Nu = 0,17 \cdot Re^{0,33} Pr^{0,43} Gr^{0,1}$  ( wg Wiśn. mnożnik = 0,15 ? )

## 20. Właściwości fizyczne płynów

### 1. Wybrane właściwości fizyczne wody

| Temp. oC | Gęstość                    | Ciepło właściwe | Wsp. przewodzenia        | Wsp. lepkości kinematycznej    | Wsp. rozszerzaln.  | Liczba Prandtla |
|----------|----------------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------------|--------------------|-----------------|
| T, °C    | $\rho$ , kg/m <sup>3</sup> | $c$ , J/(kg K)  | $10^2 \lambda$ , W/(m K) | $10^6 \nu$ , m <sup>2</sup> /s | $10^4 \beta$ , 1/K | Pr              |
| 20       | 998,2                      | 4183            | 59,9                     | 1,006                          | 1,82               | 7,02            |

|    |       |      |      |       |      |      |
|----|-------|------|------|-------|------|------|
| 30 | 995,7 | 4174 | 61,8 | 0,805 | 3,21 | 5,42 |
| 40 | 992,2 | 4174 | 63,5 | 0,659 | 3,87 | 4,31 |
| 70 | 997,8 | 4187 | 66,8 | 0,415 | 5,70 | 2,55 |
| 90 | 965,3 | 4208 | 68,0 | 0,326 | 6,95 | 1,95 |

## 2. Wybrane właściwości fizyczne oleju maszynowego MS-20 [7 – Wiśn.]

| Temp. °C | Gęstość                    | Ciepło właściwe | Wsp. przewodzenia   | Wsp. lepkości Kinematycznej    | Wsp. rozszerzaln.  | Liczba Prandtla |
|----------|----------------------------|-----------------|---------------------|--------------------------------|--------------------|-----------------|
| T, °C    | $\rho$ , kg/m <sup>3</sup> | $c$ , J/(kg K)  | $\lambda$ , W/(m K) | $10^6 \nu$ , m <sup>2</sup> /s | $10^4 \beta$ , 1/K | Pr              |
| 20       | 892,3                      | 2043            | 0,134               | 1125                           | 6,35               | 15400           |
| 30       | 886,6                      | 2072            |                     | 526                            |                    | 7310            |
| 40       | 881,0                      | 2106            | 0,131               | 276                            | 6,42               | 3890            |
| 50       | 875,3                      | 2135            | 0,130               | 153                            | 6,46               | 2180            |
| 70       | 864,0                      | 2198            | 0,128               | 58,1                           | 6,55               | 865             |
| 90       | 852,7                      | 2261            | 0,126               | 27,5                           | 6,64               | 420             |

## 3. Wybrane właściwości fizyczne suchego powietrza [7 – Wiśn.]

| Temp. °C | Gęstość                    | Ciepło właściwe | Wsp. przewodzenia        | Wsp. lepkości Kinematycznej    | Wsp. rozszerzaln. | Liczba Prandtla |
|----------|----------------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------------|-------------------|-----------------|
| T, °C    | $\rho$ , kg/m <sup>3</sup> | $c$ , J/(kg K)  | $10^2 \lambda$ , W/(m K) | $10^6 \nu$ , m <sup>2</sup> /s | $\beta$ , 1/K     | Pr              |
| 20       | 1,205                      | 1005            | 2,59                     | 15,1                           | 1/293             | 0,703           |
| 30       | 1,165                      | 1005            | 2,67                     | 16,0                           |                   | 0,701           |
| 40       | 1,128                      | 1005            | 2,76                     | 17,0                           |                   | 0,699           |
| 50       | 1,093                      | 1005            | 2,83                     | 17,9                           |                   | 0,698           |
| 70       | 1,029                      | 1009            | 2,96                     | 20,0                           |                   | 0,694           |
| 90       | 0,972                      | 1009            | 3,13                     | 22,1                           |                   | 0,690           |

$$\text{Liczba Grashofa : } Gr = \beta_m \nu_m^{-2} g d_e^3 \Delta T$$

$$\text{Liczba Nusselta : } Nu = \alpha / \lambda_m \cdot d_e$$

$$\text{Liczba Pecleta: } Pe = Re Pr$$

## 21. Niektóre metody szybkiego mnożenia

Warunkiem opanowania metody szybkiego mnożenia jest znajomość wyników wybranych iloczynów bazowych oraz zależności wynikającej z wzoru na różnicę kwadratów w postaci klasycznej lub zmodyfikowanej.

Przykładami iloczynów bazowych są:

$$37 \times 3 = 111$$

$$74 \times 3 = 222$$

$125 \times 8 = 1000$   
 $625 \times 16 = 10000$   
 $12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$   
 $11 \times 11 = 121$   
 $17 \times 17 = 289$   
 $25 \times 25 = 30 \times 20 + 5 \times 5 = 625$   
 $35 \times 35 = 1\,225$   
 $45 \times 45 = 2\,025$   
 ...  
 $85 \times 85 = 7\,225$   
 $95 \times 95 = 9\,025$

Przykłady zastosowania ^iloczynów bazowych^ :

$37 \times 27 = 37 \times 3 \times 9 = 999$   
 $128 \times 72 = 3 \times 72 + 125 \times 8 \times 9 = 216 + 9\,000 = 9\,216$   
 $124 \times 56 = -56 + 125 \times 8 \times 7 = 7\,000 - 56 = 6\,944$

Przykłady zastosowania klasycznego wzoru na różnicę kwadratów:

$58 \times 62 = 3600 - 4 = 3\,596$   
 $31 \times 49 = 1600 - 81 = 1\,519$   
 $14 \times 36 = 25 \times 25 - 11 \times 11 = 625 - 121 = 504$   
 $35 \times 65 = 50 \times 50 - 15 \times 15 = 2500 - 225 = 2\,275$

Przykłady zastosowania wzoru zmodyfikowanego :

$75 \times 75 = 70 \times 80 + 5 \times 5 = 5\,625$   
 $105 \times 105 = 110 \times 100 + 5 \times 5 = 11\,025$

Inne ( ulubiona cyfra np. 7):

$37 \times 21 = 777$   
 $12\,345\,679 \times 63 = 777\,777\,777$

Przykłady dzielenia :

$666/37 = 6 \times 111/37 = 6 \times 3 = 18$   
 $5500/125 = 5000/125 + 4 = 44$

(koniec p. 24)

## 22. Literatura

1. B. Staniszewski: Wymiana ciepła . Podstawy teoretyczne. PWN. W-wa 1979.
2. B. Staniszewski: Termodynamika. PWN, 1986.
3. S. Wiśniewski, T. Wiśniewski: Wymiana ciepła . WNT. W-wa 1994.
4. W. Longa : Krzepnięcie odlewów . Wyd. Śląsk. Katowice 1985.
5. W. Longa, E. Urbanik, W. Kapturkiewicz: Stygnięcie i krzepnięcie odlewów. Laboratorium. Skrypt AGH nr 623. Kraków 1978.

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

6. P. J. Schneider: Temperature Response Charts. John Wiley . New York and London 1963.
7. M. A. Michiejew: Osnovy tieploperedaczi. Gos Energo Izdatielstwo. Moskwa 1949, s. 96.
8. Praca zbiorowa (red. J. Kulesza): Pomiary cieplne. WNT W-wa, 1993 (cz. 2, s. 229)
9. S. Wilk :Termodynamika techniczna, Wyd. Szk. i Pedag. W-wa 1989.
10. Stefanowski, J. Jasiewicz: Podstawy techniki cieplnej. WNT 1968
11. I. T. Aładiew : NACA tech. Mem. 1356, 1954.
12. W. Krajewski : Wykład z przedmiotu „Termodynamika i technika cieplna” ( materiały niepublikowane)
13. Konspekty i materiały dydaktyczne na stronie Pracowni Termodynamiki Procesów Odlewniczych (Katedra Inżynierii Procesów Odlewniczych).

#### Zagadnienia do egzaminu dla studentów zaocznych (czerwiec 2012)

1. Równanie różniczkowe przewodzenia ciepła
2. Nagrzewanie półprzestrzeni przy ustalonych warunkach brzegowych 1 rodzaju.
3. Nieustalone pole temperatury ciał klasycznych.
4. Równania opisujące przebieg przemian gazowych
5. Pierwsza zasada termodynamiki i przykłady zastosowania do typowych przemian.

### **23. Krótkie streszczenie wybranych zagadnień (ściąga W7)**

Nazwa pliku: 2013 - Termod G-ściąga W7 (definicje, wzory, uwagi itp. )

Uwaga: W Internecie jest wiele błędnych definicji dotyczących ciśnienia statycznego, dynamicznego i całkowitego !

#### **23. 1. Wybrane definicje z zagadnień wymiany ciepła**

Nieustalone pole temperatury to zależność funkcyjna w której zmienną zależną jest wartość temperatury a zmiennymi niezależnymi współrzędne położenia i czas. Jeżeli pole jest stacjonarne (ustalone) to zależy wyłącznie od współrzędnych, czyli nie zależy od czasu.

Ustalone pole temperatury zależy tylko od współrzędnych położenia.

Gęstość strumienia cieplnego „q” jest to ilość ciepła wymieniana przez jednostkową powierzchnię ciała odniesiona do jednostki czasu, czyli:

$$q = \frac{dQ}{F d\tau} \quad \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (1)$$

gdzie: F – pole powierzchni [ m<sup>2</sup> ] przez którą przepływa elementarne ciepło dQ,

dQ - elementarne ciepło [ J ],

$\tau$  - czas [ s ].

Pojęcie gradientu temperatury definiowane jest ogólnie za pomocą pochodnej :

$$gradT = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2a)$$

a dla ustalonego, liniowego pola temperatury { T= f(x) } w postaci:

$$gradT = \frac{dT}{dx} \quad \left[ \frac{K}{m} \right] \quad (2b)$$

Podstawowe parametry termofizyczne (materiału formy, metalu odlewu, materiał izolacyjny) decydujące o przebiegu procesu przewodzenia ciepła:

a)  $\lambda$  - współczynnik przewodzenia ciepła  $\left[ \frac{W}{m \cdot K} \right]$ , („lambda”),

b)  $c$  - ciepło właściwe  $\left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right]$ ,

c)  $\rho$  - gęstość masy  $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ , ( litery „ro” nie należy mylić z „podobną” literą ”p”).

Dodatkowe (^rozszerzone^, złożone) parametry termofizyczne to:  
[Współczynnik wyrównywania temperatury](#) definiowany jest wzorem:

$$a = \frac{\lambda}{c \rho} \dots \dots \dots \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

Natomiast [współczynnik akumulacji ciepła](#) określony jest zależnością:

$$b = \sqrt{\lambda \cdot c \cdot \rho} \quad \left[ \frac{Ws^{1/2}}{m^2 K} \right]$$

Nazwa tego współczynnika wynika z faktu, że w pewnych zagadnieniach przewodzenia ilość akumulowanego w ciele ciepła jest proporcjonalna do wartości współczynnika akumulacji ciepła.

[Prawo Fouriera](#) :

Gęstość strumienia cieplnego jest proporcjonalna do gradientu :

$$.q = - \lambda \text{ grad} T$$

Dla warunków brzegowych 3 rodzaju , zwane też warunkami Newtona ( zadana temperatura otoczenia  $T_{ot}$  i współczynnik wymiany ciepła  $\alpha$  ) gęstość strumienia cieplnego jest proporcjonalna do spiętrzenia temperatury na powierzchni kontrolnej (  $T_{pow} - T_{ot}$  ) czyli

$$.q = \alpha (T_{pow} - T_{ot}) , \quad [W/m^2]$$

Wzór ten nazywany jest [prawem Newtona](#) ( od nazwy: warunki brzegowe Newtona)

Dla ścianki cylindrycznej konieczne jest wprowadzenie pojęcia [liniowej gęstości strumienia cieplnego  \$q\_L\$](#) , która jest ilością przepływającego ciepła odniesionego do jednostki długości ścianki dla jednostkowego interwału czasowego, czyli :

$$q_L = \frac{Q}{L \Delta \tau} \quad [W/m]$$

$Q$  - całkowita ilość przepływającego ciepła [ J ].

Najogólniejsze równanie opisujące gęstość strumienia cieplnego dla ścianki cylindrycznej, wielowarstwowej - przy warunkach brzegowych 3 rodzaju (WB3r) dotyczących powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej - może być zapisane:

$$q_L = \frac{2 \pi (T_{ot1} - T_{ot2})}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} + \frac{1}{\alpha_2 r_{n+1}}} \quad [W/m]$$

.gdzie :  $r_i$  - promienie kolejnych warstw cylindrycznych,  
 $\alpha$  - współczynnik wymiany ciepła [W/ (m<sup>2</sup> K)]

Temperatura bezwymiarowa  $\theta$  (litera  $\theta$  dla warunków brzegowych 1. rodzaju (zadana temperatura powierzchni –  $\theta$ OTOCZENIE NIE ISTNIEJE))

$$\theta = \frac{T - T_{pow}}{T_0 - T_{pow}} \quad (\text{wartość bezwymiarowa, opisana funkcją błędów Gaussa})$$

Nieustalone pole temperatury półprzestrzeni nagrzewanej przy ustalonych warunkach brzegowych 1 rodzaju (WB1r) wyraża zależność:

$$\frac{T - T_{pow}}{T_0 - T_{pow}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-u^2} du = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$$

. czyli jest opisana funkcją błędów Gaussa „erf”,  $a = \frac{\lambda}{c \rho} \dots \dots \dots \left[ \frac{m^2}{s} \right]$

.  $x$  – odległość punktu od powierzchni,  
 $T_0$  - temperatura początkowa.

Temperatura bezwymiarowa  $\theta$  dla ciał klasycznych przy ustalonych warunkach brzegowych 3 rodzaju (WB3r, zadane  $T_{ot}$  i wsp.  $\alpha$ , brak rozważań o temperaturze powierzchni) wyraża zależność:

$$\theta = \frac{T - T_{ot}}{T_0 - T_{ot}} \quad (\text{bezwymiarowa, funkcja 3 kryteriów: Fo, Bi,  $k_x$ ),}$$

ujęta jest w postaci nomogramów.

Kryterium Fouriera definiowane jest :

$$Fo = a \tau / X^2, \quad a = \lambda / (c \rho)$$

Kryterium Biota :

$$Bi = \alpha \cdot \lambda / X,$$

Bezwymiarowa współrzędna  $k_x = x / X$ ,  $k_x \in [0, 1]$ .

Ujęcie kryterialne pola temperatury ciał klasycznych (nieograniczonej płyty, nieskończonego walca lub kuli) można przedstawić

$$\theta = f(Fo, Bi, k_x) \quad (2)$$

Zastosowanie ujęcia bezwymiarowego pozwala przedstawić przebieg procesu cieplnego za pomocą nomogramów (przebieg zależny od kształtu ciała).

UWAGA

$\wedge$ Definicja $\wedge$  występująca często w ściągach (dla półprzestrzeni (?) i war .brzeg. 1 rodzaju):

Termodynamika technika cieplna & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

$$\theta = \frac{T - T_{2p}}{T_{pow} - T_{2p}} = f(Fo, Bi) \quad (\text{lub 2. .variant } f(Fo_x, Bi_x))$$

jest bezsensowna i należy o powyższym wzorze ZAPOMNIEĆ !!  
(a niby ile wynosi wymiar charakterystyczny X dla półprzestrzeni ??)

### Liczba Reynoldsa :

Liczba Reynoldsa (kryterium) jest wielkością bezwymiarową odwrotnie proporcjonalną do lepkości kinematycznej  $\nu$  [ $m^2/s$ ] , ( NIE do objętości właściwej  $\nu$ . !)

$$Re = w d_e / \nu ,$$

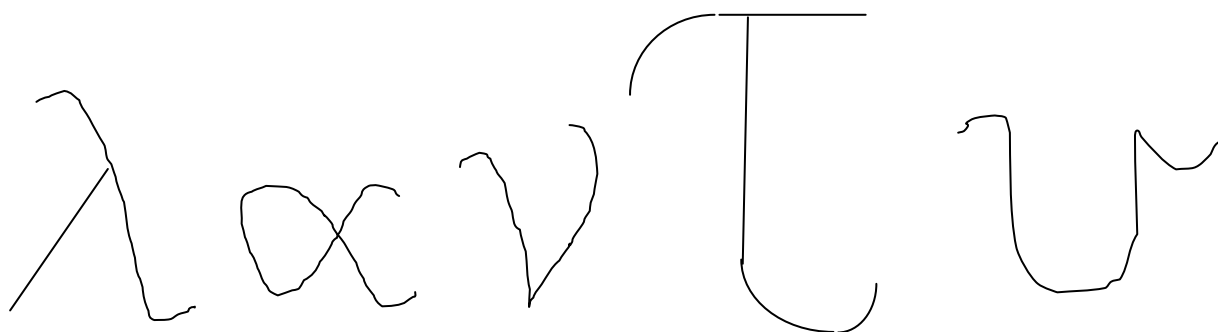
.gdzie :

W – średnia prędkość liniowa przepływu [ $m/s$ ]

. $d_e$  – charakterystyczny wymiar ,

. $\nu$  - lepkość kinematyczna.

Wybrane litery greckie (lambda, alfa, ni, tau – niezbyt ładne, atoli można poprawić) oraz litera  $\nu$  ( objętość właściwa)



G-sciaga (4.02. 2013 ( [agrad@agh.edu.pl](mailto:agrad@agh.edu.pl) \* 12 617 27 85)

## 23. 2. Definicje wybranych pojęć z zagadnień przepływu płynu (wymiany masy)

**Płynem** nazywamy ciecz, gaz oraz ich mieszaninę (parę).

**Płyn doskonały** to taki, który spełnia dwa warunki:

- c) jest nieściśliwy, czyli nie zmienia swojej gęstości (bliższe temu warunkowi są ciecze),
- d) jest nielepki, czyli zależne od lepkości siły tarcia, występujące w warstwach o różnych prędkościach są pomijalnie małe.

Płyny nie spełniające powyższych warunków są **płynami rzeczywistymi**.

**Przepływ ustalony** (stacjonarny) występuje wówczas, jeżeli prędkość, ciśnienie i inne właściwości płynu, w dowolnym punkcie przestrzeni (strugi) nie zmieniają się z upływem czasu (występuje tu analogia do ustalonego pola temperatury).

Termodynamika technika ciepła & WymCiepłaMasyPędu #TTT88A A. Gradowski

Jednym z głównych parametrów termodynamicznych płynu jest ciśnienie statyczne. Definicje.

**Ciśnieniem statycznym  $p_s$**  nazywamy:

- c) ciśnienie płynu pozostającego w spoczynku (np. ciśnienie w butli z gazem),
- d) takie ciśnienie płynu przepływającego, którego pomiar uniezależnia jego wartość od prędkości przepływu, np. ciśnienie mierzone przyrządem (manometrem) poruszającym się wraz z płynem w tym samym kierunku i z tą samą prędkością.

Jeżeli wewnątrz poruszającego się płynu ustawimy prostopadle do wektora prędkości małą przegrodę (płytkę) to ciśnienie w miejscu zahamowania przepływu (powierzchnia kontaktu płynu z płytką) jest tzw. **ciśnieniem całkowitym  $p_c$** . Przyrost ciśnienia na powierzchni przegrody - czyli różnica ciśnienia całkowitego i statycznego - nazywany jest **ciśnieniem dynamicznym  $p_d$** . Przy pomiarze ciśnienia całkowitego rurką Pitota, zahamowanie przepływu płynu wystąpi w obszarze manometru, np. w przypadku gazu, na powierzchni cieczy manometrycznej.

W przewodzie całkowicie wypełnionym przepływającym czynnikiem (np. o przekroju kołowym) wyróżnia się trzy rodzaje przepływów:

- c) **laminarny** (uwarstwiony, warstwowy),  $Re < 2320$ ,
- d) **przejściowy** (mieszany),  $2320 < Re < 50000$ ,
- b) **turbulentny** (burzliwy),  $Re > 50000$ .

$$Re = \frac{w_{sr} \cdot d_e}{\nu_p}$$

- . gdzie:  $w_{sr}$  - średnia liniowa prędkość przepływu płynu w kanale [m/s],
- .  $d_e$  - średnica kanału cylindrycznego lub - dla przekrojów niekołowych - wymiar ekwiwalentny, czyli tzw. średnica hydrauliczna,

$\nu_p$  - lepkość kinematyczna płynu [ $m^2/s$ ].

**Ruch laminarny** - strugi czynnika przepływającego układają się równolegle do osi przewodu, przy czym w przekroju wzdłużnym rozkład prędkości, ma przybliżony kształt paraboli, a największa prędkość wypada w osi przewodu.

**Ruch turbulentny** - ruch płynu (czynnika) nie ma nic wspólnego z liniowym, jest chaotyczny, występuje mieszanie z możliwością powstawania wirów. Jest on ze swej natury zmienny w czasie. Prędkość jest trudną do określenia funkcją położenia, dlatego do opisu przepływu używa się parametrów uśrednionych.

**Objętościowe natężenie przepływu** [ $m^3/s$ ] wynosi :

$$\dot{V} = w_{sr} F \rho$$

**Masowe natężenie przepływu** [ $kg/s$ ] wynosi :

$$\dot{m} = w_{sr} F \rho$$

### 23. 3. Wybrane zagadnienia przemian gazowych

Podstawowymi pojęciami są:

- energia wewnętrzna  $u$  (wzór 1b),
- praca zewnętrzna  $l_z$ , (1c),
- praca techniczna  $l_t$ , (2c)

- entalpia  $i$  (wzór 2b lub 3).

**Wartości odniesione do 1 kg gazu przyjęto oznaczać małą literą.**

Tabela 1 przedstawia podstawowe parametry przemian termodynamicznych w zestawieniu z dwiema postaciami 1. zasady termodynamiki, w odniesieniu do 1 kg gazu.

| <b>1ZTp1</b> => 1. zasada termodynamiki - postać 1. | <b>1ZTp2</b> => 1. zasada termodynamiki - postać 2 | Wymiar  |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------|
| $dq = du + dl_z$ (1a)                               | $dq = di + dl_t$ (2a)                              | [J/ kg] |
| $du = c_v dT$ (1b)                                  | $di = c_p dT$ (2b)                                 | [J/ kg] |
| $dl_z = p dv$ (1c)                                  | $dl_t = -v dp$ (2c)                                | [J/ kg] |

Uwaga 1: 1ZTp2 (postać 2) wynika z wyrugowania zmiennej  $u$  (energia wewnętrzna) i zastąpienie jej entalpią, zgodnie z zależnością:

$$i = u + pv \quad [\text{J/ kg}] \quad (3)$$

Uwaga 2: przyjęto umowę, że małe litery występują w zależnościach opisujących parametry odniesione do masy gazu 1 kg

W tabeli 2 przedstawiono wybrane zależności opisujące parametry podstawowych przemian termodynamicznych.

Tabela 2

| Rodzaj przemiany                               | Praca zewnętrzna ( $l_z$ lub $\Delta l_z$ ) | Przyrost ciepła [J/ kg]      | Przyrost energii wewnętrznej | Praca techniczna        |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| Izobara<br>. $dp = 0$ , $v/T = \text{const}$   | . $l_z = p (v_2 - v_1)$                     | $\Delta q = c_p (T_2 - T_1)$ | $\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$ | . $l_t = 0$             |
| Izochora<br>$dv = 0$ , $p/T = \text{const}$    | . $l_z = 0$                                 | $\Delta q = \Delta u$        | $\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$ | $l_t = v (p_1 - p_2)$   |
| Adiabata<br>. $dq = 0$ , $pv^k = \text{const}$ | $l_z = -\Delta u = -c_v (T_2 - T_1)$        | $dq = 0$                     | $\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$ | $l_t = c_p (T_2 - T_1)$ |
| Izoterma<br>. $dT = 0$ , $pv = \text{const}$   | $l_z = RT \ln(v_2/v_1)$                     | $\Delta q = l_z$             | $\Delta u = 0$               | $l_t = RT \ln(p_1/p_2)$ |

$R$  – indywidualna stała gazowa [J/ (kg K)] zgodnie z równaniem stanu gazu  $pv = RT$  [J/ kg]

Uwaga 3: logarytm we wzorach (izoterma) wynika np. z całki „ $dp/p$ ” =  $\ln p$  (z war.:  $p_1, p_2$ )

Uzasadnienie przykładowych zależności z tabeli 2:

- a) dla izobary mamy :  $dp = 0 \Rightarrow dl_t = 0 \Rightarrow dq = di \Rightarrow \Delta q = \Delta i = c_p (T_2 - T_1)$
- b) dla izochory mamy :  $dv = 0 \Rightarrow dl_z = 0 \Rightarrow dq = du \Rightarrow \Delta q = \Delta u$
- c) dla izotermi mamy :  $dT = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow dq = dl_z \Rightarrow \Delta q = \Delta l_z$
- d) dla adiabaty:  $dq = 0 \Rightarrow dl_z = -du = -c_v dT \Rightarrow$  po całkowaniu:

$$l_z = -c_v (T_2 - T_1) \text{ oraz } dl_t = di = c_p dT \Rightarrow \text{po całkowaniu } l_t = c_p (T_2 - T_1).$$

Uwaga:  $v = 1/\rho$  - małe „ $V$ ”, objętość właściwa [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ], a duże „ $V$ ” - objętość [ $\text{m}^3$ ]

W tabeli 3 przedstawiono wybrane pojęcia i parametry niezbędne do matematycznego opisu procesów termodynamicznych.

| Symbol                  | Nazwa parametru (pojęcia)                    | Jednostka             | Przykłady zależności                            |
|-------------------------|----------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------------|
| <b>Q</b>                | Ciepło                                       | J/ kg                 | $dq = du + dl_z$                                |
| <b>U</b>                | energia wewnętrzna (małe u, więc dla 1 kg)   | J/ kg                 | $du = c_v dT$ (definicja)                       |
| <b>c<sub>v</sub></b>    | ciepło właściwe przy stałej objętości        | J/(kg K)              | $R_i = c_p - c_v$                               |
| <b>l<sub>z</sub></b>    | praca zewnętrzna ( małe l , więc dla 1kg)    | J/ kg                 | $dl_z = - p dv$ , $dq = du + dl_z$              |
| <b>l<sub>t</sub></b>    | praca techniczna ( małe l , więc dla 1kg)    | J/ kg                 | $dl_t = - v dp$ , $dq = di + dl_t$              |
| <b>v</b>                | objętość właściwa ( czytaj 'fał')            | m <sup>3</sup> / kg   | $v = 1/ \rho = V/m$ (definicja)                 |
| <b>i *</b>              | entalpia właściwa ( małe 'i' , więc dla 1kg) | J/ kg                 | $i = u + p v$ (definicja)                       |
| <b>p</b>                | Ciśnienie                                    | Pa= N/ m <sup>2</sup> | $p = \rho R T$                                  |
| <b>R<sub>i</sub>, R</b> | stała gazowa indywidualna                    | J/(kg K)              | $p v = R T$ , $p V = m R T$                     |
| <b>R<sub>u</sub></b>    | stała gazowa uniwersalna                     | J/ (kmol K)           | $R = R_u / M$ , $R_u = 8315 \text{ J/(kmol K)}$ |
| <b>M</b>                | masa molowa                                  | kg/kmol **            | $R = R_u / M$                                   |
| <b>V</b>                | Objętość                                     | m <sup>3</sup>        | $\rho = m/ V$ (definicja)                       |
| <b>m</b>                | Masa                                         | kg                    | $m = V/ v$                                      |
| <b>p</b>                | gęstość (czytaj 'ro')                        | kg/ m <sup>3</sup>    | $p = \rho R T$ [ Pa ]                           |
| <b>k</b>                | wykładnik adiabaty                           | -                     | $k = c_p / c_v$ , $c_v = R/(k-1)$               |

\* w chemii oznacza się najczęściej przez 'h'

.....

**Przemiana adiabatyczna**-Adiabatą nazywamy przemianę, w której warunkiem koniecznym jest brak wymiany ciepła z otoczeniem. Jest to możliwe wówczas, gdy podczas tej przemiany ani ciepła nie doprowadzamy, ani też go nie odprowadzamy.

**Warunek :**  $dq = c_v dT + p dv = 0$  lub  $dQ = dU + dL_z = 0$  ,  $dq, du, dl_z$  – [J/ kg] ,  $Q, U, L_z$  [J]

Definicje wybranych parametrów ( dla 1 kg gazu )

| Pojęcie        | Energia wewnętrzna | Praca zewnętrzna   | Praca techniczna    | Entalpia     |
|----------------|--------------------|--------------------|---------------------|--------------|
| Zależność (nr) | $du = c_v dT$ (1b) | $dl_z = p dv$ (1c) | $dl_t = -v dp$ (2c) | (2b) lub (3) |

## 24. Tematy ćwiczeń laboratoryjnych

1. Badanie współczynnika wymiany ciepła i przewodzenia ciepła powłoki izolacyjnej - warunki brzegowe 3. rodzaju
2. Badanie współczynnika wyrównywania temperatury materiału formy piaskowej w oparciu o model półprzestrzeni.
- 3.. Badanie współczynnika wyrównywania temperatury materiału dla układu o kształcie cylindrycznym.

4. Badanie profilu ciśnienia i natężenia przepływu gazów w rurociągach
5. Badanie przemiany izotermicznej i adiabatycznej.
6. Pomiary temperatury za pomocą termoelementów.
7. Badanie wilgotności gazów na przykładzie powietrza.
8. Procesy promieniowania ciepła.
9. Pomiar temperaturowej zależności współczynnika przewodzenia ciepła materiału formierskiego.
10. Analiza parametrów procesu spalania.

## **25. Prosta krzyżówka inżynierska**

| POZIOMO |                                                                                               |                                                                         |                                           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1       | A.. przypadkowa obecność greckich krasnali w nazwie nowoczesnej technologii                   | R.. ważne przedłużenie ramienia partii w czasach PRL-u                  |                                           |
| 2       | A.. eufemistycznie o alkoholiku                                                               | P.. pierwiastek chemiczny o masie atomowej 102,9                        |                                           |
| 3       | C.. jest w nim napisane, że pies nie ma prawa ugryźć rabina                                   | J.. ptasi                                                               | P... wierzy w ^felinoterapię^             |
| 4       | F.. przydatne pechowemu kierowcy                                                              | I.. nazwa hotelu w Janowie Lubelskim lub duńskiego zespołu perkusyjnego |                                           |
| 5       | M.. lubił krytykę i kpiny z mózgu i rozumu                                                    |                                                                         |                                           |
|         | A.. duszący gad                                                                               | E.. najlepsza uczelnia w Europie                                        |                                           |
| 6       | I.. stolica i nazwa serwisu komórek                                                           | N.. typ zmiennych w języku FORTRAN                                      |                                           |
|         | A.. zjada stare samochody                                                                     | H.. w każdej Gminie                                                     |                                           |
| 7       | N.. metal o cieple krzepnięcia 65 kJ/kg                                                       | R.. każdy kierowca musi go mieć                                         |                                           |
| 8       | E.. powinna być silna i zwyciężać                                                             | O.. ważna informacja w lokalach                                         |                                           |
| 9       | C.. irlandzki inżynier, który w XIX wieku opracował kryterium do analizy przepływu płynu      | N.. owoc lub audycja telewizyjna                                        |                                           |
| 10      | E.. podstawowe zmartwienie mężczyzn                                                           | J.. ... rodu Forsytów                                                   | R.. posiada ciepło krzepnięcia 399 kJ/ kg |
| 10      | A.. miseczka ryżu dla chińskiego mnicha                                                       | H.. najślusznieszy układ jednostek.                                     | K.. ..przerobiła chłopca na śledzia !.    |
| PIONOWO |                                                                                               |                                                                         |                                           |
| 1       | A.. nie znał liczb Reynoldsa, Prandla, Galileusza a i tak zbudował ..                         | C.. mocny, stalowy i ma dwie głowy                                      | D.. byle jakie koło                       |
|         | E.. w trutce na szczury                                                                       | G.. podstawowe zmartwienie kobiet                                       | I.. każdy student powinien ją mieć        |
|         | K.. Od jego imienia pochodzi nazwa ważnej stałej matematycznej, która ma swoje święto w marcu | R.. lubi futro nauczycielki chemii                                      | S.. tylko do młodych, nie dla starych     |

|   |                                                                              |                                                     |
|---|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 2 | P.. zamiast kupić za gotówkę płacisz ją co miesiąc.                          |                                                     |
| 3 | F.. udają mu się wszystkie doświadczenia, choć robi je inaczej               |                                                     |
|   | J.. ani Polak ani Niemiec                                                    | M.. tak oznaczają auta Słowacy                      |
|   | N.. brutto , netto ...                                                       |                                                     |
| 4 | B... posiada symbol Rh                                                       | I.. system operacyjny w czasach słusznie minionych  |
|   | O.. wymyślił ważny warunek brzegowy do równania Fouriera                     | M.. lubił krytykować rozum a nawet mózg.            |
| 5 | A.. ulubiony stop profesora o imieniu Stanisław                              | C.. ksywka żony mojego kolegi Stefana lub imię psa. |
|   | R.. nazwisko autora książki o węzłach cieplnych i nadlewach                  |                                                     |
| 6 | H.. Sylwester, kończył Wydział Odlewnictwa w roku 1971                       |                                                     |
| 7 | E... Kazimierz , prorektor Uniwersytetu Jagiellońskiego w latach 1963 - 1965 |                                                     |
|   | J.. ważna część ciała, po angielsku                                          | L.. bardzo duży mnożnik                             |
|   | P.. Inicjały mojego kuzyna Andrzeja i krakowskiego aktora                    |                                                     |
| 8 | S.. córka popularnego choć byłego prezydenta                                 |                                                     |
| 9 | B.. symbol ważnego składnika w stalach odpornych na korozję                  |                                                     |
|   | K.. inicjały Adama, który kończył studia w roku 1971 (razem z Sylwestrem )   |                                                     |
|   | M.. nieprzydatna dla inżynierów jednostka pola powierzchni                   |                                                     |

| .. --     | A   | B   | C   | D   | E   | F   | G   | H   | I   | J   | K   | L   | M   | N   | O   | P   | R   | S   |           |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| <b>1</b>  |     |     |     |     |     | ... |     | ... |     | ... |     | ... | ... | ... | ... | ... |     |     | <b>1</b>  |
| <b>2</b>  |     |     |     |     |     | ... |     | ... |     | ... |     | ... | ... | ... | ... | ... |     |     | <b>2</b>  |
| <b>3</b>  |     | ... |     |     |     |     |     |     | ... |     |     |     |     |     | ... |     |     |     | <b>3</b>  |
| <b>4</b>  | ... |     | ... |     | ... |     |     | ... |     |     |     | ... |     |     |     |     | ... | ... | <b>4</b>  |
| <b>5</b>  |     |     |     | ... |     |     |     | ... |     |     |     |     | ... |     |     |     |     | ... | <b>5</b>  |
| <b>6</b>  |     |     |     |     | ... | ... | ... |     |     | ... |     | ... | ... |     |     | ... |     |     | <b>6</b>  |
| <b>7</b>  |     | ... |     | ... |     |     |     |     | ... |     | ... |     | ... | ... | ... |     |     | ... | <b>7</b>  |
| <b>8</b>  |     | ... |     |     |     |     |     |     |     |     | ... |     | ... | ... |     |     |     |     | <b>8</b>  |
| <b>9</b>  | ... |     | ... | ... |     |     |     |     | ... |     |     |     |     | ... |     | ... |     |     | <b>9</b>  |
| <b>10</b> |     |     |     | ... |     | ... | ... |     |     | ... |     |     |     |     |     |     | ... |     | <b>10</b> |

## 26. Uwagi końcowe

1. Każdy dobry konspekt musi posiadać nieco błędów (*errare humanum est*)
2. *Feci quod potui, faciant meliora potentes.*



Wersja TTT88A