

# Teoria cieplna procesów odlewniczych

## Ćw. laboratoryjne nr 2

**Bilans cieplny układu odlew – nadlew otoczenie – badanie czasu krzepnięcia odlewu i parametrów termofizycznych formy piaskowej.**

### I. Wprowadzenie

Matematyczny opis krzepnięcia i stygnięcia odlewu:

Równanie różniczkowe przewodzenia ciepła wyprowadzić można w sposób ogólny korzystając ze wzoru Gaussa – Ostrogradzkiego,

- pozwala zamienić całkę powierzchniową po powierzchni zamkniętej na całkę potrójną, po obszarze ograniczonym tą powierzchnią

Równanie różniczkowe Fouriera – Kirchoffa:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T = a \cdot \text{div}(\text{grad} T) \quad (1)$$

- dodając wydajność źródła ciepła  $\int_V q_v dv$

otrzymuje się ogólną postać równania różniczkowego przewodzenia ciepła:

$$C_T \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda_T \text{grad} T) + q_v \quad (2)$$

gdzie:  $C_T$  – objętościowe ciepło właściwe [ $\text{J}/\text{m}^3\text{K}$ ],

$q_v$  – wydajność objętościowa wewnętrznych źródeł ciepła  $\text{W}/\text{m}^3$

$\text{div}$  – operator różniczkowy będący sumą pierwszych

pochodnych cząstkowych po współrzędnych kartezjańskich

Równanie różniczkowe przewodzenia ciepła w ciałach stałych zostało wyprowadzone na podstawie bilansu energetycznego przy założeniu działania prawa Fouriera

- jest równaniem ogólnym, słusznym dla wszystkich ciał, spełniającym przyjęte założenia.

Warunki jednoznaczności:

1. Warunki geometryczne – określające kształt układu,
2. Warunki fizyczne – określające warunki termofizyczne układu,
3. Warunki początkowe – określające rozkład temperatury, w układzie w momencie przyjętym za początkowy
4. Warunki brzegowe – charakteryzujące wzajemne oddziaływanie układu z otoczeniem

#### Założenia modelowe

Ponieważ rozpatrujemy pewien model procesu, konieczne jest

wprowadzenie następujących założeń modelowych upraszczających:

- odlew ma kształt płyty zorientowanej pionowo z układem wlewowym na górnej, czołowej powierzchni odlewu o niewielkich wymiarach, zapewniających szybkie zalanie formy,
- forma spełnia warunek półprzestrzeni w sensie cieplnym (nie traci ciepła do otoczenia)
- parametry termofizyczne metalu odlewu oraz formy są przyjęte jako stałe (średnie) czyli są niezmiennie z temperaturą,
- parametry formy zapewniają małą intensywność stygnięcia odlewu czyli mały spadek temperatury na przekroju odlewu,
- obszar ewentualnej jamy skurczowej nie wpływa na czas krzepnięcia odlewu,
- opór cieplny szczeliny gazowej (skurczowej) powstającej na granicy odlew-forma piaskowa jest pomijalnie mały,
- zakłada się bardzo krótki czas zalewania formy, co pozwala przyjąć - dla momentu początku procesu - jednakową temperaturę dla obszaru ciekłego metalu odlewu, jak również jednakową temperaturę w obszarze formy piaskowej,
- metal odlewu krzepnie w stałej temperaturze.

Model procesu stygnięcia i krzepnięcia odlewu w formie piaskowej:

Matematyczne ujęcie procesu stygnięcia metalu w okresie odprowadzania ciepła przegrzania (drugi okres stygnięcia odlewu):

Nagrzewanie półprzestrzeni przy ustalonych warunkach brzegowych 1-go rodzaju:

Gęstość strumienia ciepłego przechodzącego przez powierzchnię kontrolną:

$$q_{pow} = \frac{b \vartheta_{pow}}{\sqrt{\pi \tau}} \quad (3)$$

Bilans cieplny:

$$dQ_1 = dQ_2$$

$$V_1 \rho_1 c_1 (-d\vartheta_1) = \frac{b_2}{\sqrt{\pi \tau}} F \vartheta_1 d\tau$$

- spiętrzenie temperatury początkowej metalu:  $J_{1p} = T_{1p} - T_{2p}$

$$\vartheta_{1p} = T_{1p} - T_{2p}, \vartheta_{kr} = T_{kr} - T_{2p}, d\vartheta_1 = dT_1$$

$$\text{dla } \tau = \tau_1 \text{ wynika } T_1 = T_{1p}$$

$T_{1p}$  - początkowa temp. metalu w momencie wypełnienia wnęki formy

$T_{2p}$  - temperatura początkowa formy

$T_{kr}$  - temperatura początku krzepn.

$M$  - moduł odlewu,  $M = V_1/F$

$$\sqrt{\tau_2} = \frac{\sqrt{\pi} \rho_1 c_1 M}{2b_2} \ln \frac{\vartheta_{1p}}{\vartheta_{kr}}$$

II okres nagrzewania (stygnięcia) ciał o kształcie prostym

Matematyczne ujęcie procesu krzepnięcia odlewu dla stałej temperatury krzepnięcia (trzeci okres stygnięcia odlewu):

Bilans ciepła:

$$dQ_1 = dQ_2$$

$$\rho_1 L_1 dV_{kr} = \frac{b_2}{\sqrt{\pi \tau}} F \mathcal{G}_1 d\tau$$

- spiętrzenie temperatury początkowej metalu:

$$\mathcal{G}_{1p} = T_{1p} - T_{2p}, \mathcal{G}_{kr} = T_{kr} - T_{2p}$$

dla  $\tau = \tau_2$  wynika  $T_1 = T_{kr}$  - początkowa temperatura metalu w momencie wypełnienia wnęki formy

$$V_{kr} = \frac{2b_2 \mathcal{G}_{kr}}{\sqrt{\pi} \rho_1 L_1} F (\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_2})$$
$$V_{kr} = kF (\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_2})$$

$V_{kr}$  - zakrzepła objętość metalu  $m^3$

$L_1$  - ciepło krystalizacji J/kg,

$k$  - stała krzepnięcia,

dla  $\tau = \tau_3$  wynika  $V_{kr} = V_1 = MF$

$$\sqrt{\tau_3} = \frac{M}{k} + \sqrt{\tau_2}$$

III okres nagrzewania (stygnięcia) ciał o kształcie prostym

**Przykład obliczeń czasu odprowadzania ciepła przegrzania (drugi okres stygnięcia odlewu), czasu krzepnięcia (trzeci okres stygnięcia odlewu) i prędkości krzepnięcia odlewu**

Płyta aluminiowa o grubości  $g = 24$  mm krzepnie w formie piaskowej o współczynniku  $b_2 = 1170 \text{ Ws}^{1/2}(\text{m}^2\text{K})$ , posiadającej temperaturę początkową  $T_0 = T_{2p}$  równą  $20^\circ\text{C}$ . Formę zapełniono metalem o temperaturze zalewania  $T_{zal} = 710^\circ\text{C}$ . Przyjmując spadek temperatury metalu podczas zapełniania formy  $\Delta T_{zal} = 10\text{K}$ , obliczyć czas trwania 2 i 3 okresu stygnięcia odlewu. Obliczyć rzeczywistą, liniową prędkość krzepnięcia odlewu dla czasu  $t_3$  i  $t_2$  oraz średnią liniową prędkość krzepnięcia odlewu.

**Rozwiązanie:**

Dane termofizyczne dla aluminium:

$$T_{kr} = 660^\circ\text{C}, L_1 = 390000 \text{ J/kg}, c_1' = 1290 \text{ J/(kg K)}, r_1 = 2700 \text{ kg/m}^3.$$

**A. Obliczenie czasu odprowadzania ciepła przegrzania**

Moduł dla kształtu płyty:  $M = g/2 = 0,024/2 = 0,012 \text{ m}$ .

Początkowa temperatura metalu w momencie wypełnienia wnęki formy:

$$T_{1p} = T_{zal} - 10 = 700^\circ\text{C}.$$

Spiętrzenie temperatury początkowej metalu:  $J_{1p} = T_{1p} - T_{2p} = 700 - 20 = 680 \text{ K}$ .

$$\sqrt{\tau_2} = \frac{\sqrt{\pi} \rho_1 c_1' M}{2b_2} \ln \frac{\vartheta_{1p}}{\vartheta_{kr}} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2700 \cdot 1290 \cdot 0,012}{2 \cdot 1170} \ln \frac{680}{660 - 20} = 1,92$$

$$\tau_2 = 3,67\text{s}$$

**B. Obliczenie czasu krzepnięcia odlewu**

Stała krzepnięcia:

$$k = \frac{2b_2 \vartheta_{kr}}{\sqrt{\pi} \rho_1 L_1} = \frac{2 \cdot 1170 \cdot (660 - 20)}{\sqrt{3,14} \cdot 2700 \cdot 390000} = 8,04 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^{1/2}$$

$$\tau_3 = \left( \frac{M}{k} + \sqrt{\tau_2} \right)^2 = \left( \frac{0,012}{8,04 \cdot 10^{-4}} + 1,92 \right)^2 = 284\text{s}$$

**C. Obliczenie prędkości krzepnięcia dla  $t_3$  i  $t_2$**

W przypadku krzepnięcia odlewu o kształcie płyty lub krzepnięcia elementu o płaskiej powierzchni stygnięcia zmienność grubości warstwy krzepnącej w odlewie wyraża tzw. prawo pierwiastka kwadratowego:

Zakrzepła objętość metalu:

$$V_{kr} = kF(\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_2})$$

Zakrzepła grubość odlewu:

$$\xi = k(\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_2})$$

Liniowa prędkość krzepnięcia:

$$v_{\xi} = \frac{d\xi}{d\tau} \longrightarrow v_{\xi} = \frac{k}{2\sqrt{\tau}}$$

Liniowa prędkość krzepnięcia dla momentu końca krzepnięcia odlewu ( $t_3$ ):

$$v_{\xi} = \frac{k}{2\sqrt{\tau_3}} = \frac{8,04 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{284}} = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

Liniowa prędkość krzepnięcia dla początku procesu krzepnięcia odlewu ( $t_2$ ):

$$v_{\xi} = \frac{k}{2\sqrt{\tau_2}} = \frac{8,04 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{3,68}} = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Średnia liniowa prędkość krzepnięcia odlewu ( $X_1$  – połowa grubość płyty):

$$v_{\xi sr} = \frac{X_1}{\tau_3 - \tau_2} = \frac{0,012}{284 - 3,67} = 4,28 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

## II. Przebieg ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie, na podstawie bilansu cieplnego, II i III okresu stygnięcia odlewu

1. W piecu laboratoryjnym wytapiamy metal – czyste aluminium
2. Metal przegrzewamy do temperatury ok. 720 °C
3. Wykonujemy formę piaskową płyty o orientacji pionowej, spełniającej warunek nieograniczoności
4. W osi płyty umieszczamy termoparę w celu rejestracji temperatur podczas procesu zalewania, krzepnięcia i stygnięcia odlewu
5. Po osiągnięciu przez metal temperatury ok. 720 C, z powierzchni metalu ściągamy zgar i zalewamy formę ciekłym metalem
6. Włączamy urządzenie rejestrujące zmiany temperatury w czasie procesu zalewania, krzepnięcia i stygnięcia odlewu
7. Na urządzeniu rejestrującym (mierniku Agilent) rejestrujemy zmiany temperatury w czasie od momentu zalewania do temperatury poniżej temperatury krzepnięcia odlewu.
8. Na podstawie danych temperatura – czas należy sporządzić wykresy krzywych stygnięcia
9. Korzystając z zależności zamieszczonych w rozdziale 1 oraz przykładu obliczeniowego należy sporządzić sprawozdanie z wykonanego ćwiczenia laboratoryjnego.