

BADANIE PARAMETRÓW PRZEMIANY IZOTERMICZNEJ I ADIABATYCZNEJ

Katedra Inżynierii Procesów Odlewniczych (opracował: A. Gradowski)

(2R- Termod-Adia-Izoter–W42)

1. Wprowadzenie i wybrane pojęcia termodynamiki

Podstawowymi zależnościami niezbędnymi do matematycznego opisu przebiegu procesów przemian termodynamicznych są:

- równanie stanu gazu doskonałego,
- pierwsza zasada termodynamiki w obu postaciach.

Poniżej przedstawimy uproszczony opis wybranych pojęć, niezbędnych do matematycznego ujęcia podstawowych przemian gazowych (izobaryczna, izotermiczna, izochoryczna i adiabatyeczna).

A. Indywidualna stała gazowa

Ponieważ brakuje ogólnie zatwierdzonej definicji, określimy ją (nie jest to definicja!), wykorzystując równanie stanu gazu, czyli w postaci

$$R_i = p \nu T^{-1} = p \nu / T \quad [\text{J}/(\text{kg K})]$$

gdzie: R_i – indywidualna stała gazowa, $\text{J}/(\text{kg K})$,

p – ciśnienie, Pa ($\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2 = \text{J}/\text{m}^3$),

ν – objętość właściwa [m^3/kg],

T – temperatura bezwzględna, K .

Inny wariant jej określenia wynika z wykorzystania równanie Meyera:

$$R_i = c_p - c_v \quad [\text{J}/(\text{kg K})]$$

gdzie:

c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, [$\text{J}/(\text{kg K})$]

c_v – ciepło właściwe przy stałej objętości, [$\text{J}/(\text{kg K})$]

Przykładowe równanie, zwane **równaniem stanu gazu** doskonałego:

$$p \nu = R_i T \quad [\text{J}/\text{kg}]$$

Jeżeli w równaniu występuje R , bez indeksu dolnego „i” to domyślamy się, że chodzi o stałą gazową indywidualną, co wynika zresztą jednoznacznie z analizy jednostek tego równania.

Stałej gazowej indywidualnej **nie wolno mylić** z tzw. uniwersalną stałą gazową R_u [$\text{J}/(\text{mol K})$] lub [$\text{J}/(\text{kmol K})$], której stosowanie w termodynamice jest niewygodne lub niemożliwe (zdaniem autora), wymaga bowiem znajomości składu chemicznego i molowego rozpatrywanego czynnika.

W obliczeniach termodynamicznych niezbyt często stosuje się pojęcie „objętość gazu V [m^3]”, preferując pojęcie **objętości właściwej** ν [m^3/kg]. Pozwala to na ułatwienie obliczeń i odniesienie wielu parametrów do 1 kg gazu. Istnieje umowa, że nazwa takich parametrów zaczyna się od małej litery (np. q , u , l_z , i).

Wykresy przemian termodynamicznych (gazowych) w układzie pracy posiadają na osi odciętej objętość właściwą, dzięki czemu pola pracy zewnętrznej l_z i technicznej l_t uzyskuje się w J/kg (iloczyn: $\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} = \text{J}/\text{m}^2 \cdot \text{m}^3/\text{kg} = \text{J}/\text{kg}$). Można również – o ile to wykonalne i uzasadnione – przedstawić przebieg procesu w układzie $p - V$, czyli ciśnienie w postaci funkcji całkowitej objętości badanego gazu (w sprawozdaniu z ćwiczenia laboratoryjnego nr 7 jest to niewykonalne!).

B. Objętość właściwa i gęstość

Objętość właściwą wyraża wzór definicyjny:

$$\nu = \frac{V}{m} \quad [\text{m}^3/\text{kg}]$$

V – objętość [m^3], m – masa [kg]

Gęstość jest odwrotnością objętości właściwej :

$$\rho = v^{-1} = \frac{m}{V} \quad [\text{kg/m}^3]$$

Przykładowe równanie:

$$p = \rho R_i T \quad [\text{Pa}]$$

C. Przyrost energii wewnętrznej i ciepło

$$du = c_v dT \quad [\text{J/kg}]$$

Przykładowe równanie (**1. zasada termodynamiki**) :

$$dq = du + dl_z \quad [\text{J/kg}]$$

q – ciepło odniesione do 1 kg czynnika (gazu)

Pojęcie ciepła, jako tzw. pojęcie pierwotne, nie wymaga definicji w sensie matematycznym. Dla przemiany izobarycznej (przy stałym ciśnieniu) może być wyrażone w postaci:

$$dq = c_p dT \quad [\text{J/kg}]$$

D. Praca zewnętrzna

Wzór definicyjny ma postać:

$$dl_z = p dv \quad [\text{J/kg}]$$

Szukając analogii do fizycznej definicji pracy, łatwo zauważyć, że ciśnienie p jest proporcjonalne do wartości działającej siły a zmiana objętości właściwej jest wprost proporcjonalna do przemieszczenia (drogi).

E. Entalpia właściwa

Jest to suma energii wewnętrznej i iloczynu ciśnienia i objętości właściwej . Iloczyn ten ma sens pracy dla 1 kg czynnika (zwany jest czasami pracą przetłaczania):

$$i = u + p v \quad [\text{J/kg}]$$

Przykładowe równanie (**2. postać 1-szej zasady termodynamiki**) :

$$dq = di - v dp \quad [\text{J/kg}]$$

F. Tabelaryczne ujęcie podstawowych parametrów

Istnieje umowa, że małymi literami oznacza się parametry odnoszące się do jednostki masy (1kg). Poniższa tabela przedstawia (wybiórczo!) najczęściej stosowane pojęcia i parametry niezbędne do matematycznego opisu procesów termodynamicznych.

Symbol	Nazwa parametru (pojęcia)	Jednostka	Przykłady zależności
q	ciepło	J/ kg	$dq = du + dl_z$
u	energia wewnętrzna (małe u, więc dla 1 kg)	J/ kg	$du = c_v dT$ (definicja)
c_v	ciepło właściwe przy stałej objętości	J/(kg K)	$R_i = c_p - c_v$
l_z	praca zewnętrzna (małe l , więc dla 1kg)	J/ kg	$dl_z = - p dv$, $dq = du + dl_z$
l_t	praca techniczna (małe l , więc dla 1kg)	J/ kg	$dl_t = - v dp$, $dq = di + dl_t$
v	objętość właściwa (czytaj 'fał')	m ³ / kg	$v = 1/ \rho = V/m$ (definicja)
i *	entalpia właściwa (małe 'i' , więc dla 1kg)	J/ kg	$i = u + p v$ (definicja)
p	ciśnienie	Pa= N/ m ²	$p = \rho R T$
R_i , R	stała gazowa indywidualna	J/(kg K)	$p v = R T$ ($R \equiv R_i$)
R_u	stała gazowa uniwersalna	J/ (kmol K)	$R = R_u / M$, $R_u = 8315 \text{ J/(kmol K)}$
M	masa molowa	kg/kmol **	$R = R_u / M$
V	objętość	m ³	$\rho = m/ V$ (definicja)
m	masa	kg	$m = V/ v$
ρ	gęstość (czytaj 'ro')	kg/ m ³	$p = \rho R T$ [Pa]
k	wykładnik adiabaty	-	$k = c_p / c_v$, $c_v = R/(k-1)$

* w chemii oznacza się najczęściej przez 'h'

** mimo, że zgodnie u układem jednostek SI jednostką ilości substancji (obok kg) jest mol, w obliczeniach bardziej wygodna jest jednostka większa czyli kmol.

2. Pierwsza zasada termodynamiki

Pierwsza zasada termodynamiki posiada kilka równoważnych sformułowań.

Najczęściej używa się sformułowania:

Ciepło doprowadzone z zewnątrz do nieruchomego układu zamkniętego jest zużywane na zmianę jego energii wewnętrznej oraz wykonanie pracy zewnętrznej (pracy nad siłami zewnętrznymi). Ciepło to jest więc algebraiczną sumą zmiany energii wewnętrznej i pracy zewnętrznej. Dla 1 kg czynnika (gazu) wyraża to zależność:

$$dq = du + dl_z, \quad [J/ kg]$$

W powyższym równaniu mamy:

$du = c_v dT$ - zmiana energii wewnętrznej oraz

$dl_z = p du$ - wartość pracy zewnętrznej.

Pierwsza zasada termodynamiki przyjmuje różne postacie uproszczone dla konkretnych przemian termodynamicznych. Przykładowo:

- dla przemiany izotermicznej (stała temperatura, czyli $dT = 0$) zerową wartość przyjmuje zmiana energii wewnętrznej, czyli $dq = dl_z$,
- dla przemiany izochorycznej (stała objętość właściwa $du = 0$) zerową wartość przyjmuje wartość pracy zewnętrznej, czyli $dq = du$,
- dla przemiany adiabatycznej (brak doprowadzonego ciepła, czyli $dq = 0$) zerową wartość przyjmuje lewa strona ogólnego równania, czyli $du + dl_z = 0$.

Uwaga: zapis I zasady termodynamiki w podręcznikach do fizyki jest inny, co wynika z odmiennej umowy odnośnie do znaku pracy.

Wprowadzając pojęcie entalpii $i = u + p v$ ($u = i - p v$), pierwszą zasadę termodynamiki można łatwo przekształcić do tzw. „drugiej postaci”:

$$dq = di + dl_t,$$

gdzie dl_t jest tzw. pracą techniczną równą:

$$dl_t = - v dp.$$

Poniżej zostanie przedstawiony matematyczny opis przemiany adiabatycznej (brak wymiany ciepła z otoczeniem). Należy zauważyć, że istnieje metoda modyfikacji podstawowych zależności uzyskanych dla adiabaty w celu uzyskania równań adekwatnych dla procesu przemiany izotermicznej. W pewnych przypadkach, przekształcając zależność dotyczącą przemiany adiabatycznej, poprzez przyjęcie wykładnika adiabaty k równego 1, uzyskuje się poprawne równanie opisujące proces izotermiczny (np. $p v^k = \text{const} \Leftrightarrow p v = \text{const}$). Dotyczy to przykładowo:

- ogólnej postaci równania przemiany (równ. 4),
- niektórych różniczkowych postaci równania przemiany (równ. 3a),
- stosunku wartości pracy zewnętrznej i technicznej (równ. 8b).

3. Matematyczno-fizyczny opis przemiany adiabatycznej.

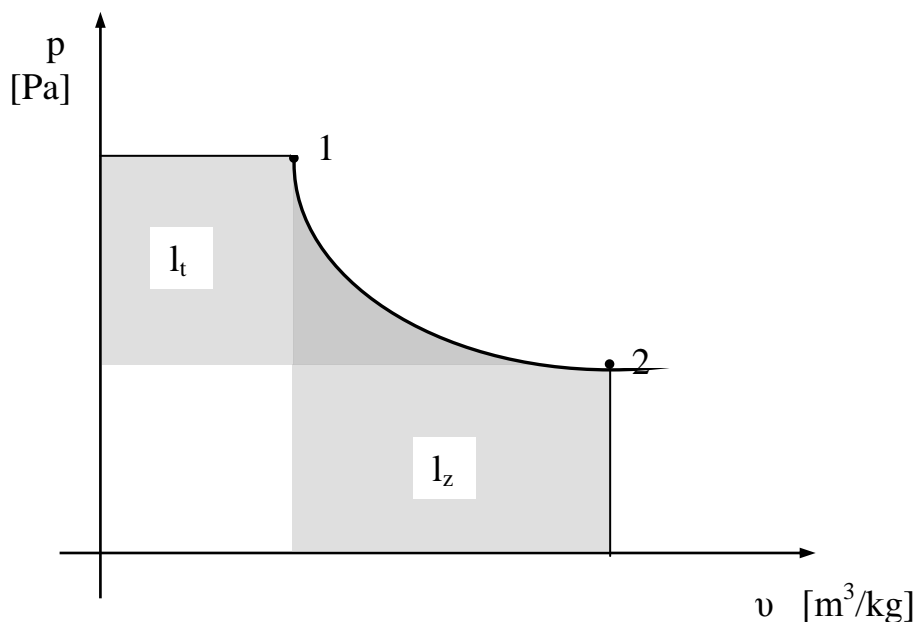
Adiabatą nazywamy przemianę, w której warunkiem koniecznym jest brak wymiany ciepła z otoczeniem. Jest to możliwe wówczas, gdy podczas tej przemiany ani ciepła nie doprowadzamy, ani też go nie odprowadzamy. Ponieważ $q = \text{const}$ (lub $Q = \text{const}$, $dq = 0$) wartość różniczkowego ciepła przemiany adiabatycznej wyniesie:

$$dq=0$$

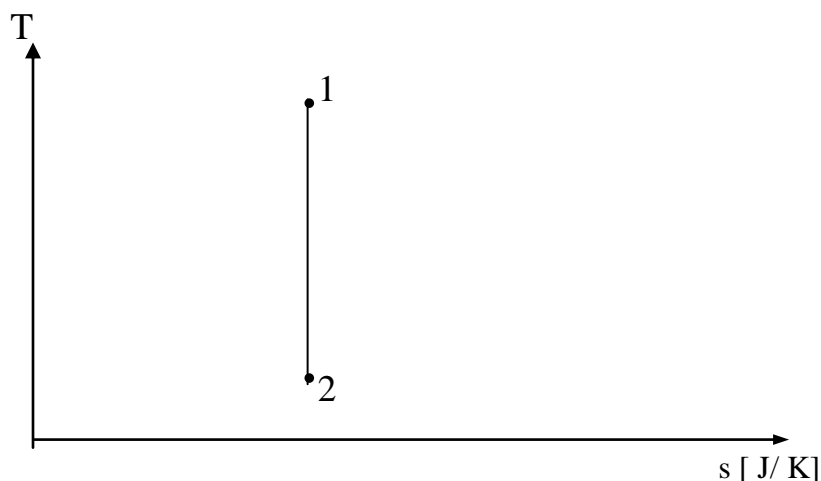
Jedyną przemianą gazową, która może być (czasem) odwracalna jest przemiana adiabatyczna. W tym przypadku musi ona spełnić tzw. warunek braku przyrostu entropii

$$ds = \frac{dq}{T} = 0$$

Całkowanie równania (1) pozwala stwierdzić niezmiennosc entropii ($S_1 = S_2$). Dlatego też odwracalna przemiana adiabatyczna bywa nazywana przemianą izentropową lub ściślej przemianą adiabatyczno-izentropową. Przebieg przemiany przedstawiony jest na rys. 1 w układzie $p - v$, zwanym układem pracy, a na rys. 2 w układzie ciepła ($T - s$).



Rys. 1. Przemiana adiabatyczna w układzie pracy
(ciemne pole to obszar wspólny dla pracy zewnętrznej i technicznej)



Rys. 2. Wykres adiłaty w układzie ciepła (układ T- s).

Podstawą analitycznego ujęcia przebiegu przemiany adiabatyczno-izentropowej jest pierwsza zasada termodynamiki sformułowana w 1842 r. przez J. R. Mayera (uściślona 5 lat później przez H. de Helmholtza). Poniżej wyprowadzimy pierwszy wariant równania adiłaty przy założeniu, że opis przemiany wyrazimy za pomocą współrzędnych $p - v$.

Z równania I zasady termodynamiki (tzw. postać pierwsza) i warunku cieplnego przemiany ($dq = 0$) wynika:

$$dq = du + dl_z = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$.dq$ elementarne ciepło przemiany [J/kg],

$du = c_v dT$ - różniczkowy przyrost energii wewnętrznej [J/kg],

$dl_z = p dv$ - elementarna praca zewnętrzna [J/ kg],

p - ciśnienie [Pa = N/ m²],

v - objętość właściwa równa $v = V/m$, [m³ / kg],

V, m - objętość [m³] i masa gazu [kg]

Ponieważ $du = c_v dT$, więc

$$c_v dT + p dv = 0.$$

Równanie stanu gazu doskonałego (wariant chemiczny wykorzystuje uniwersalną stałą gazową a wersja techniczna - indywidualną stałą gazową $R_i = R$) ma postać:

$$p v = R T \quad [J/ kg], \quad (2)$$

R - indywidualna stała gazowa [J/(kg K)],

T - temperatura bezwzględna [K].

Powyższe równanie pozwala – po zróżniczkowaniu - wyznaczyć:

$$dT = d(p v)/R, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{c_v}{R} (p dv + v dp) + p dv = 0 \quad (2a)$$

Indywidualna stała gazowa [J/(kg K)] może być ujęta tzw. wzorem Mayera:

$$R = c_p - c_v, \quad \text{więc}$$

$$\frac{c_v}{R} = \frac{c_v}{c_p - c_v} = \frac{1}{k-1} \quad (3)$$

Stosunek $k = \frac{c_p}{c_v}$ jest tzw. wykładnikiem przemiany adiabatycznej (w równaniu końcowym

wystąpi jako wykładnik potęgi w członie z objętością właściwą).

Podstawiając wyrażenie (3) do równania (2a) otrzymuje się:

$$\frac{1}{k-1} (p dv + v dp) + p dv = 0.$$

Mnożąc obie strony równania przez (k-1) uzyskujemy po redukcji wyrazów podobnych :

$$k p dv + v dp = 0$$

Dzieląc obie strony równania przez iloczyn $p v$ otrzymamy równanie różniczkowe adiabaty:

$$k \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (3a)$$

Jego całkowanie prowadzi do wyniku

$$k \ln \frac{v_2}{v_1} + \ln \frac{p_2}{p_1} = 0,$$

i po przekształceniu otrzymamy postać podstawową:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k, \quad (4)$$

co stanowi równanie adiabaty-izentropy w układzie $p - v$ (tzw. układ pracy).

Krzywe ilustrujące przemianę adiabatyczną przedstawione zostały na rys. 1, 2.

Równanie adiabaty możemy przedstawić również w postaciach odmiennych od równania (3), uwzględniających zmianę trzeciego czynnika czyli temperatury. W tym celu zależność (3) zapiszemy w postaci ogólnej, wykorzystując równanie stanu:

$$p v^k = \frac{RT}{v} v^k = p \left(\frac{RT}{p} \right)^k = \text{const} \quad (5)$$

Z ogólnej postaci równania adiabaty (4) można uzyskać następujące zależności:

a) zmienność objętości właściwej i temperatury:

$$T v^{k-1} = \text{const}, \text{ lub } T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_2^{k-1} \quad (6)$$

b) zmienność ciśnienia i temperatury:

$$T^k p^{1-k} = \text{const}, \text{ lub } T_1^k p_1^{1-k} = T_2^k p_2^{1-k} \quad (7)$$

Równanie (6) może być podstawą do przewidywania kierunku zmiany temperatury przy sprężaniu (spadek objętości właściwej i wzrost temperatury) i rozprężaniu gazu (odwrotnie).

Pracę zewnętrzną oblicza się z pierwszej zasady termodynamiki, czyli:

$$dq = du + dl_z = 0$$

Skąd wynika:

$$dl_z = - du$$

a po scałkowaniu otrzymujemy:

$$l_z = u_1 - u_2 \quad (8)$$

A więc praca zewnętrzna zostaje wykonana kosztem spadku energii wewnętrznej. Wyrażenie (6) można jeszcze przekształcić do postaci:

$$l_z = c_v (T_1 - T_2).$$

Ponieważ $c_p - c_v = R$ oraz $c_p / c_v = k$, więc $c_v = R / (k - 1)$, i następnie

$$l_z = \frac{1}{k-1} R (T_1 - T_2) = \frac{1}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \quad (8a)$$

Praca techniczna występuje w drugiej postaci I zasady termodynamiki, czyli można ją obliczyć analogicznie do pracy zewnętrznej. Ponieważ :

$$dq = di + dl_t = 0$$

czyli

$$dl_t = - di;$$

oraz

$$l_t = i_1 - i_2$$

Jak z powyższego wynika warunkiem wykonania pracy technicznej jest spadek entalpii właściwej [J/ kg], czyli jest ona wykonana kosztem tego spadku.

Między pracą techniczną i zewnętrzną zachodzi następująca zależność:

$$\frac{l_t}{l_z} = \frac{i_1 - i_2}{u_1 - u_2} = \frac{c_p (T_1 - T_2)}{c_v (T_1 - T_2)} = \frac{c_p}{c_v} = k,$$

.czyli: $l_t = k l_z \quad (8b)$

Korzystając z równania (3) i równania stanu gazu (2) otrzymujemy:

$$l_t = \frac{k}{k-1} R (T_1 - T_2) = \frac{k}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \quad (9)$$

4. Wybrane metody oznaczania wykładnika adiabaty

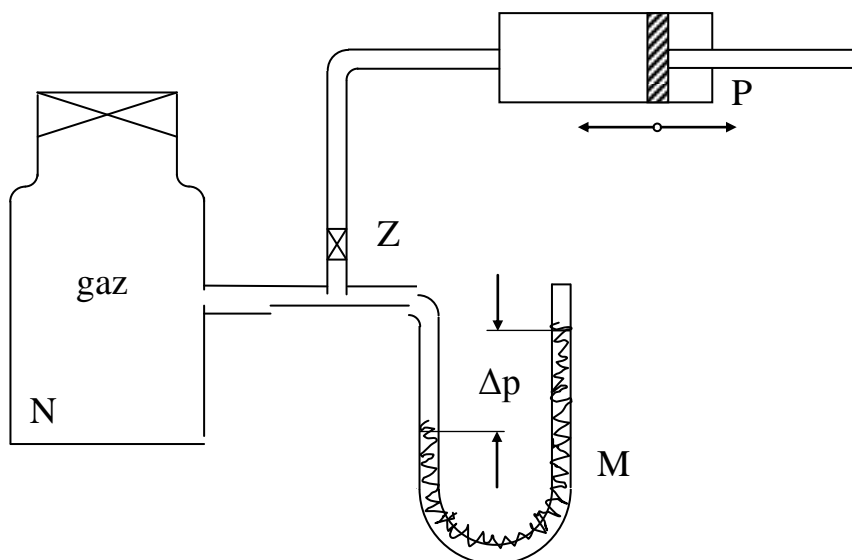
W dalszych rozważaniach rozpatrzemy dwie metody oznaczenia wykładnika adiabaty:

- metoda Clementa-Desormesa,
- metoda Lummera-Pringsheima.

Pierwsza metoda wymaga prowadzenia pomiaru przy stosowaniu małych nadciśnień gazu, podczas gdy w drugiej ograniczenie to nie występuje. Obie metody wykorzystują matematyczny opis przemiany adiabatycznej w odniesieniu do zmienności ciśnienia, z czego wynika, że podstawowym przyrządem pomiarowym jest manometr cieczowy.

Opisane niżej doświadczenie spełnia założenie przebiegu przemiany przy małych ciśnieniach (nadciśnieniach) czyli szukana wartość wykładnika adiabaty może być uzyskana za pomocą procedur obliczeniowych opisujących obie z wymienionych metod.

Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Schemat układu pomiarowego (N – naczynie z badanym gazem, M – mikromanometr cieczowy, Z – zawór szklany obrotowy, P – pompka sportowa,

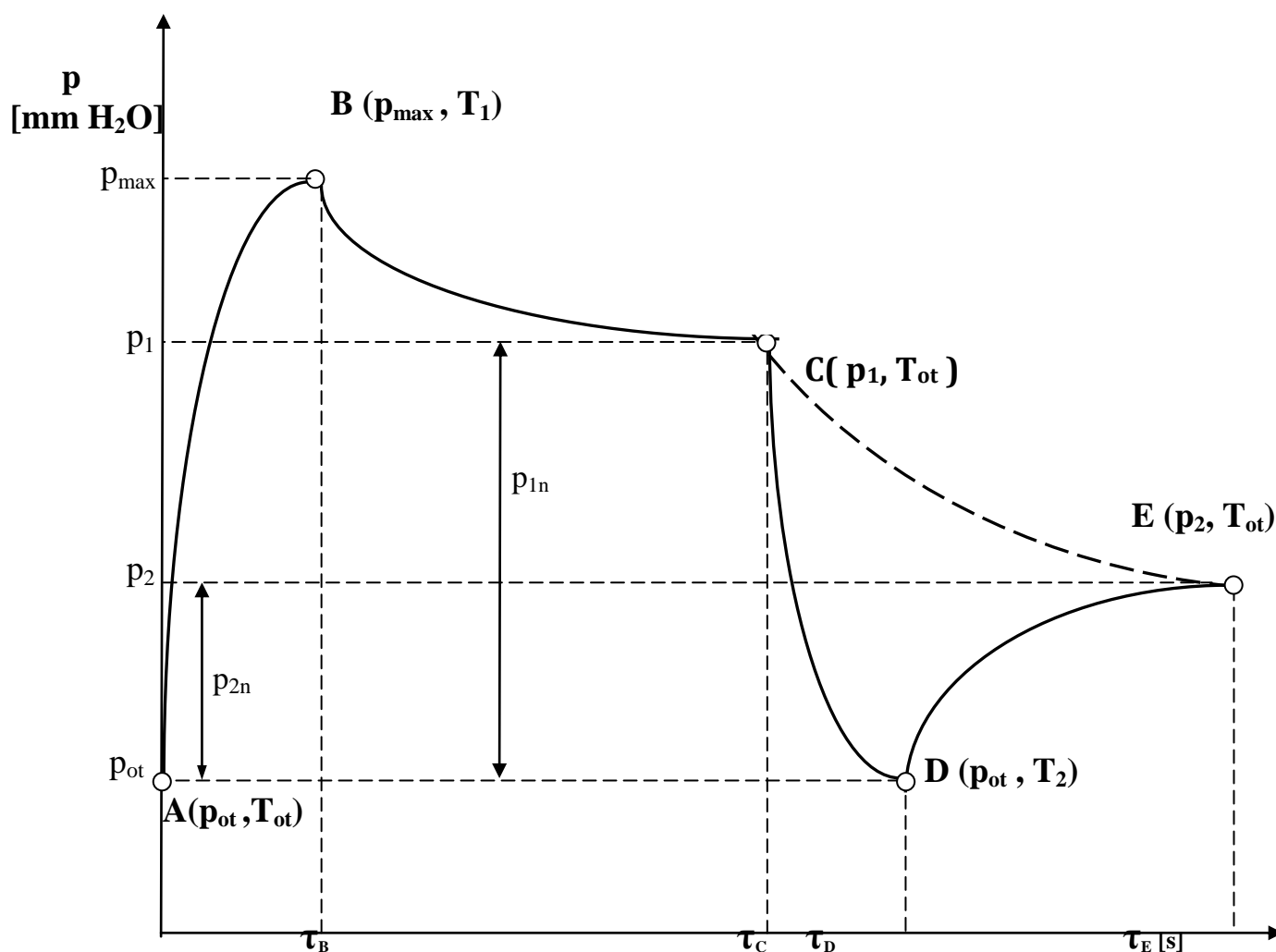
Badany gaz (np. powietrze) znajduje się w zamkniętym naczyniu laboratoryjnym. Pierwszy etap pomiaru polega na wtłoczeniu do naczynia niewielkiej ilości tego samego gazu za pomocą pompki sportowej, co powoduje (obserwowany) wzrost jego ciśnienia np. o ok. 100 mm H₂O (jest to niewielka wartość nadciśnienia, łatwa do pomiaru dowolnym manometrem cieczowym). Sprężanie gazu powoduje wzrost jego temperatury, przy czym z uwagi na krótki czas jego trwania możemy go traktować jako proces adiabatyczny (założenie to nie ma związku a dokładnością dalszych obliczeń) .

Kolejnym etapem, zachodzącym samoistnie, jest izochoryczne oziębianie gazu, zakończone po uzyskaniu zrównania jego temperatury z otoczeniem. Ten etap (drugi) kończy wstępną część eksperymentu, przy czym jej przebieg ma znikomy wpływ na dokładność części obliczeniowej.

Dowodem zakończenia tej przemiany jest stabilizacja wskazań manometru.

Badany gaz posiada w tym momencie pewne nadciśnienie. Otwarcie zaworu Z (rys. 3), powoduje wypuszczenie z naczynia pewnej ilości gazu i jego rozprężenie. Zawór zamykamy w momencie zrównania ciśnienia gazu w naczyniu z wartością ciśnienia otoczenia.

Proces ten trwa ułamek sekundy, co pozwala założyć, że zachodzi on w sposób adiabatyczny. Adiabatycznemu rozprężaniu towarzyszy oziębienie badanego gazu poniżej temperatury otoczenia.



Rys. 4. Krzywa zmiany ciśnienia badanego gazu jako podstawa podziału procesu pomiarowego na 4 etapy (AB - adiabata, BC – izochora, CD – adiabata, DE – izochora, CE – teoretyczna izoterma).

W związku z różnicą temperatur gazu w naczyniu i otoczeniu następuje samoistne izochoryczne podgrzewanie gazu do momentu wyrównania temperatur, czemu towarzyszy wzrost ciśnienia ($p/T = \text{const}$). Wartość tego wzrostu Δp_2 (rys. 4) jest zawsze mniejsza w porównaniu z ciśnieniem początkowym etapu adiabatycznego ($\Delta p_2 < \Delta p_1$), co można wyjaśnić zmniejszeniem masy gazu po otwarciu zaworu w 3. etapie eksperymentu. Przebieg obu procesów adiabatycznych dowodzi, że adiabatyczne sprężanie (linia AB) pociąga za sobą wzrost temperatury gazu, podczas gdy rozprężaniu (CD) towarzyszy spadek temperatury, przy wzroście objętości właściwej zgodnie z równaniem (6).

Zauważając, że dwa ostatnie etapy eksperymentu (adiabata połączona z izochorą) odpowiadają przemianie izotermicznej a etap przedostatni – adiabatycznej, należy opisać te procesy z punktu widzenia mierzonych zmian ciśnienia (nadcisnienia).

W obliczeniach tych niezbędna jest znajomość podstawowej zależności definicyjnej nadcisnienia:

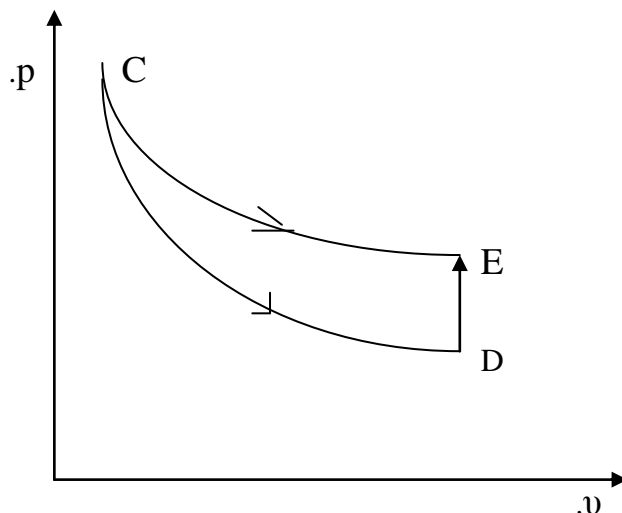
$$p_n = p - p_{ot}$$

gdzie: p_n - nadcisnienie mierzone manometrem (cieczowym z rurką pochyłą),

p - ciśnienie bezwzględne,

p_{ot} - ciśnienie barometryczne.

Poniższy - bardzo ważny - schemat przedstawia przebieg przeprowadzonych przemian tj. : adiabaty, izochory i izotermi (wg CD, DE, CE) w układzie $p - v$.



Podstawowe zależności opisujące ideę obu metod zostaną opisane poniżej.

5. Teoretyczne podstawy obliczania c_p/c_v metodą Clementa

Do dalszych rozważań niezbędne jest wyrażenie związków pomiędzy ciśnieniem i objętością gazu w trakcie procesów adiabatycznego i izotermicznego.

Dla procesu adiabatycznego skorzystamy z następujących zależności:

$$p v^k = \text{const} = c ;$$

$$p = \frac{c}{v^k} ; \quad \frac{dp}{dv} = \frac{-ck}{v^{k+1}} ; \quad \frac{dp}{dv} = \frac{-p v^k k}{v^k v} ;$$

$$\frac{dp}{dv} = -k \frac{p}{v} \quad (10)$$

Równanie izotermi możemy uzyskać jako szczególny przypadek adiabaty dla $k = 1$, czyli dla przemiany izotermicznej zachodzi związek :

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v} \quad (11)$$

Wzory (1), (2) w odniesieniu do małej zmiany objętości właściwej Δv i ciśnienia Δp można zapisać następująco:

a) dla adiabaty:

$$\frac{\Delta p_{ad}}{\Delta v} = -k \frac{p}{v} \quad (12)$$

b) dla izotermi:

$$\frac{\Delta p_{iz}}{\Delta v} = -\frac{p}{v} \quad (13)$$

Ponieważ $\Delta p_{ad} = p_{ot} - p_1$ więc:

$$\Delta p_{ad} = -p_{1n} \quad \text{i} \quad \Delta p_{iz} = p_2 - p_1 = p_{2n} - p_{1n}$$

po podzieleniu stronami równań (12) i (13) otrzymamy :

$$\Delta p_{ad} / \Delta p_{iz} = k = -p_{1n} / (p_2 - p_1) = \frac{p_1 - p_{ot}}{p_1 - p_2}$$

$$k = \frac{p_{1n}}{p_1 - p_2} = \frac{p_{1n}}{p_{1n} - p_{2n}}$$

gdzie:

- p_1, p_2 - ciśnienia bezwzględne dla punktów pomiarowych 1, 2,
 $p_{1n} = p_1 - p_{ot}$ - nadciśnienie dla punktu 1

6. Metoda Lummera – Pringsheima

W szczególnym, najprostszym przypadku przebieg badania może być analogiczny do doświadczenia Clementa-Desormesa. Postać zależności opisującej szukany wykładnik k , wynika z następujących przekształceń równania adiabaty:

$$p v^k = const \quad \text{lub} \quad p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$

Po zlogarytmowaniu mamy:

$$k \ln \frac{v_1}{v_2} = \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (14)$$

Z równania stanu gazu doskonałego $\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2}$ obliczymy

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1 p_2}{p_1 T_2} \quad (15)$$

Połączenie zależności (14) i (15) pozwala ująć szukany współczynnik k wzorem:

$$k = \frac{\ln(p_2 / p_1)}{\ln(T_1 p_2 / p_1 T_2)} \quad (16)$$

Zgodnie z przebiegiem termodynamicznych etapów doświadczenia [$p = f(\tau)$ - rys. 4] punkty temperaturowe początku (indeks 1) i końca (indeks 2) przemiany adiabatycznej odpowiadają temperaturze otoczenia $T_1 = T_{ot}$ (mierzona temperatura powietrza w sali laboratoryjnej) i nieznanej temperaturze końca tej przemiany $T_2 = T_{ad}$. Zależność (16) zapiszemy więc w postaci:

$$k = \frac{\ln(p_{ot} / p_1)}{\ln\left(\frac{p_{ot}}{p_1} \frac{T_{ot}}{T_{ad}}\right)} \quad (17)$$

Zależność (17) wyraża metodą Lummera- Pringsheima.

Nieznana temperatura końca etapu adiabaty T_{ad} jest temperaturą początku przemiany izochorycznej (etap IV) zakończonej w momencie uzyskania temperatury otoczenia. Początek izochory odpowiada ciśnieniu otoczenia p_{ot} a wskutek pobierania ciepła z otoczenia rośnie ono do wartości p_2 (mierzone manometrem jako p_{2n}). Tak więc równanie izochory ($p/T = const$) pozwala na zastąpienie wartości temperatur za pomocą ciśnień:

$$\frac{p_{ot}}{T_{ad}} = \frac{p_2}{T_{ot}} \Rightarrow \frac{T_{ot}}{T_{ad}} = \frac{p_2}{p_{ot}}$$

Podstawiając wartość T_{ot} / T_{ad} do (17) otrzymamy wzór końcowy w postaci:

$$k = \frac{\ln(p_{ot} / p_1)}{\ln\left(\frac{p_{ot}}{p_1} \cdot \frac{p_2}{p_{ot}}\right)} = \frac{\ln \frac{p_{ot}}{p_1}}{\ln \frac{p_2}{p_1}} \quad (18)$$

7. Termodynamiczne etapy zastosowanej metody doświadczalnej

Kolejność czynności pomiarowych przy oznaczaniu wykładnika adiabaty k (c_p / c_v) przedstawić można w postaci następujących przemian termodynamicznych:

- 1) adiabatyczne sprężenie próbki gazu od p_{ot} do p_{max} poprzez wtłoczenie do naczynia niewielkiej ilości gazu za pomocą pompki (wzrost ciśnienia i temperatury – rys. 4);
- 2) samoistne, izochoryczne rozprężanie i stygnięcie gazu w wyniku odprowadzania ciepła do otoczenia, zanikające w momencie wyrównania temperatury gazu i otoczenia,
- 3) adiabatyczne rozprężanie wskutek „połączenia” wnętrza naczynia z otoczeniem poprzez krótkotrwałe otwarcie zaworu (ochładzanie gazu);
- 4) samoistne, izochoryczne sprężanie gazu (po zamknięciu zaworu) - przy asymptotycznym przebiegu wzrostu ciśnienia – wymuszone pobieraniem ciepła od otoczenia; przemiana kończy się w momencie osiągnięcia stanu termodynamicznej równowagi (wyrównanie temperatury gazu i otoczenia, ustalenie wartości końcowego ciśnienia).

Temperatura początku etapu 3. jest równa temperaturze zakończenia etapu 4. Pozwala to na wprowadzenie do obliczeń końcowych pojęcia wirtualnej izotermy, odnoszącej parametry początku etapu 3 i końca etapu 4.

8. Przykłady obliczeń dla obu metod badań

Załóżmy, że podczas badań zmienności ciśnienia (mikromanometr) w uzyskano następujące wartości nadciśnienia gazu (powietrza) :

$$p_{1n} = 90 \text{ mm H}_2\text{O} \text{ i } p_{2n} = 25 \text{ mm H}_2\text{O} .$$

Wg metody Clementa (dla małych nadciśnień)

$$k_1 = \frac{p_{1n}}{p_1 - p_2} = \frac{90}{90 + p_{ot} - 25 - p_{ot}}$$

$$k_1 = 90 / 65 = 1.3846$$

Zgodnie z metodą Lummera ($p_{ot} = 750 \text{ Tr}$) :

$$k_2 = \frac{\ln(p_{ot} / p_1)}{\ln(p_2 / p_1)} , \quad p_{ot} = 750 \text{ Tr} = 750 \cdot 13.6 \text{ mm H}_2\text{O} = 10\,200 \text{ mm H}_2\text{O}$$

$$k_2 = \frac{\ln[10\,200 / (10\,200 + 90)]}{\ln[(10\,200 + 25) / (10\,200 + 90)]} = 1,3862$$

Z porównania wartości k_1 i k_2 wynika bardzo dobra zgodność obu metod dla małych nadciśnień używanych w doświadczeniu.

Ponieważ wzór ścisły dotyczy wartości k_2 więc błąd względny wynosi :

$$\frac{1.3862 - 1.3846}{1.3862} \cdot 100 = 0.12\%$$

Dla małych wartości $p_{1n} / p_{ot} \ll 1$ mamy

$$\ln(p_{ot} / p_1) = -\ln(1 + p_{1n} / p_{ot}) \approx -p_{1n} / p_{ot}$$

oraz

$$\ln(p_2 / p_1) = \ln\left(1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}\right) \approx \frac{p_2 - p_1}{p_{ot} + p_{1n}}$$

Wtedy uproszczony wzór ma postać:

$$k_2 = -\frac{p_{1n} \cdot p_{ot} + p_{1n}}{p_{ot} \cdot p_2 - p_1} = \frac{p_{1n}}{p_1 - p_2} \left(1 + \frac{p_{1n}}{p_{ot}} \right) \approx \frac{p_{1n}}{p_1 - p_2} .$$

Matematyczna postać powyższej zależności wyjaśnia równoważność obu metod oznaczania wartości wykładnika adiabaty k przy zastosowaniu metody małych ciśnień.

DODATEK A. Tabela parametrów przemian

Tabela parametrów 4. podstawowych przemian termodynamicznych – W3

$p \ v / T$

Dwie, ogólne postacie 1. zasady termodynamiki jako baza do tworzenia tabeli

$$\begin{array}{ll} dq = du + dl_z & , dq = di + dl_t \\ du = c_v dT & di = c_p dT \\ dl_z = p dv & dl_t = -v dp \end{array}$$

Rodzaj przemiany	Izobara . $dp = 0$, $v/T = \text{const}$	Izochora $v = 0$, $p/T = \text{const}$	Adiabata . $dq = 0$, $p v^k = \text{const}$	Izoterma . $dT = 0$, $p v = \text{const} (= RT)$
1 Zasada Termodynamiki – postać 1	$,dq = du + dl_z$	$,dq = du$	$du + dl_z = 0$	$dq = dl_z$
1 Zasada Termodynamiki – postać 2	$,dq = di$	$,dq = di + dl_t$	$di + dl_t = 0$	$dq = di + dl_t$
Praca zewnętrzna	$. l_z = p (v_2 - v_1)$	$. l_z = 0$	$l_z = -\Delta u = c_v (T_1 - T_2)$	$. l_z = RT \ln (v_2 / v_1) = RT \ln (p_1 / p_2)$
Przyrost ciepła	$\Delta q = c_p (T_2 - T_1)$	$\Delta q = \Delta u$	$dq = 0$	$\Delta q = l_z$
Przyrost energii Wewnętrznej	$\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$	$\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$	$\Delta u = p (v_2 - v_1)$	$\Delta u = 0$
Praca techniczna	$. l_t = 0$	$. l_t = v (p_1 - p_2)$	$. l_t = c_p (T_1 - T_2) = k l_z$	$. l_t = l_z = RT \ln (p_1 / p_2)$
Zmiana entalpii	$\Delta i = \Delta q$	$\Delta i = c_p (T_2 - T_1)$	$\Delta i = -l_t$	$\Delta i = 0$
Równanie przemiany	$v / T = \text{const}$	$p / T = \text{const}$	$p v^k = \text{const}$	$p v = \text{const} (= RT)$

Uwaga: Parametry w powyższej tabeli odnoszą się do 1 kg gazu !

DODATEK B. Przykłady obliczeniowe

Zadanie 1 (przykład zastosowania 1 zasady termodynamiki)

W grzejnikach powietrznych centralnego ogrzewania czynnikiem termodynamicznym jest powietrze atmosferyczne o temperaturze początkowej (T_1) równej 8°C . Projekt instalacji przewiduje podgrzewanie powietrza do temperatury $T_2 = 50^\circ\text{C}$. Objętościowe natężenie przepływu powietrza zimnego (V^*) wynosi 3200 m^3 na godzinę. Obliczyć:

- ilość doprowadzonego ciepła,
- część ciepła zużyta na wzrost energii wewnętrznej,
- część ciepła powodującą przyrost objętości gazu (co odpowiada definicji pracy zewnętrznej),
- moc cieplną procesu ogrzewania.

Wszystkie obliczone parametry będą odniesione do interwału czasowego równego 1 godzinie. Z tablic odczytujemy dla powietrza: $R_i = 287 \text{ J/ (kg K)}$ i $c_v = 720 \text{ J/ (kg K)}$. W tzw. warunkach normalnych ciśnienie atmosferyczne (barometryczne) wynosi $p_b = 1013,25 \text{ hPa}$, czyli $p_1 = p_b$.

Początkowa i końcowa objętość właściwa powietrza

$$v_1 = R_i T_1 / p_1 = 287 \cdot (8 + 273) / 101325 = 0,796 \text{ m}^3 / \text{kg} .$$

$$v_2 = R_i T_2 / p_2 = 287 \cdot (50 + 273) / 101325 = 0,915 \text{ m}^3 / \text{kg} .$$

Masa powietrza dla 1 godziny (odpowiadająca definicji masowego natężenia przepływu \dot{m}):

$$\dot{m}^* = V^* / v_1 = 3200 / 0,796 = 4020 \text{ kg/ h} .$$

Wartość pracy zewnętrznej dla 1 kg powietrza :

$$l_z = p_b \cdot (v_2 - v_1) = 101325 \cdot (0,915 - 0,796) = 12058 \text{ J/ kg}$$

Całkowita wartość pracy zewnętrznej

$$L_z = \dot{m}^* \cdot l_z = 4020 \cdot 12058 = 48473 \text{ kJ} \quad (\text{dla 1 godziny lub w kJ/ h}).$$

Przyrost energii wewnętrznej :

$$\Delta u = c_v \cdot (T_2 - T_1) = 720 \cdot (50 - 8) = 30240 \text{ J/ kg} \quad \text{oraz}$$

$$\Delta U = \dot{m}^* \cdot u = 4020 \cdot 30240 = 121565 \text{ kJ/ h} .$$

Doprowadzone ciepło (q lub Δq):

$$q = \Delta u + l_z = 30240 + 12058 = 42298 \text{ J/ kg} \quad \text{oraz}$$

$$\Delta Q = \Delta U + L_z = 121565 + 48473 = 170038 \text{ kJ/ h} .$$

Moc cieplna:

$$Q^* = \Delta Q / \Delta \tau = 170038 / 3600 = 47,2 \text{ kW} .$$

Drugi sposób rozwiązania tego zadania można uzyskać w oparciu o równania opisujące proces przemiany izobarycznej.

Zadanie 2 (przykład przemiany izotermicznej)

Azot posiada objętość początkową $V_1 = 0,3 \text{ m}^3$ i znajduje się wewnątrz obszaru umożliwiającego zmianę jego objętości, co jest równoznaczne z wykonaniem pracy. Jego początkowe ciśnienie wynosi $p_1 = 0,4 \text{ MPa}$. Do gazu doprowadzono izotermicznie ilość ciepła $\Delta Q = 100 \text{ kJ}$ (wartość dodatnia!). Obliczyć:

- parametry na końcu przemiany,
- pracę zewnętrzną i techniczną,
- objętość właściwą i masę gazu, jeśli przemiana odbyła się w temperaturze 20°C .

A. Obliczamy (wg równań dla izotermy) stosunek p_1 / p_2 i ciśnienie p_2

$$\Delta q = l_z = RT \ln (v_2 / v_1) = RT \ln (p_1 / p_2) = p_1 v_1 \ln (p_1 / p_2) , \quad [\text{J/ kg}]$$

oraz

$$\Delta Q = m p_1 v_1 \ln (p_1 / p_2) = p_1 V_1 \ln (p_1 / p_2) = 100000, \quad [\text{J}]$$

Z powyższego mamy:

$$\ln (p_1 / p_2) = \Delta Q / (p_1 V_1) = 10^5 / (0,4 \cdot 10^6 \cdot 0,3) = 0,833$$

$$p_1 / p_2 = \exp (0,833) = 2,3$$

B. Obliczamy parametry końca przemiany

$$p_2 = p_1 / 2,3 = 0,4 / 2,3 = 0,174 \text{ MPa}$$

$$V_2 = V_1 \cdot p_1 / p_2 = 0,3 \cdot 2,3 = 0,69 \text{ m}^3 .$$

C. Praca

$$L_z = L_t = \Delta Q = 100 \text{ kJ} .$$

D. Objętość właściwa i masa gazu

Możemy skorzystać z tablic lub obliczyć stałą gazową dla azotu, korzystając z wartości masy molowej M [kg/ kmol] i stałej uniwersalnej R_u , wg zależności

$$R_i = R_u / M = 8315 / (2 \cdot 14) = 297 \text{ J/ (kg K)}$$

$$\cdot v_1 = R T / p_1 = 297 \cdot (20 + 273) / (0,4 \cdot 10^6) = 0,218 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$\text{Masa gazu : } m = V_1 / v_1 = 0,3 / 0,218 = 1,38 \text{ kg.}$$

Zadanie 3 (przykład przemiany adiabatycznej)

Powietrze o masie $m = 3 \text{ kg}$ i temperaturze początkowej $t_1 = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ rozpręża się adiabatycznie od ciśnienia $p_1 = 1 \text{ MPa}$ do ciśnienia końcowego $p_2 = 0,1 \text{ MPa}$.

Obliczyć:

- temperaturę po rozprężeniu,
- objętości właściwe i całkowite,
- wartość pracy zewnętrznej.

Z tablic mamy dla powietrza $R = 287 \text{ J/ (kg K)}$ oraz wykładnik adiabaty $k = 1,4$.

Równanie wiążące stosunek ciśnień i temperatur wynika z zapisu:

$$p v^k = p \left(\frac{R T}{p} \right)^k = \text{const} \quad , \quad T^k p^{1-k} = \text{const}$$

$$T_1^k p_1^{1-k} = T_2^k p_2^{1-k}$$

Obliczamy T_2

$$T_2 = T_1 \cdot (p_1 / p_2)^{(1-k)/k} = (300 + 273) \cdot (1 / 0,1)^{-0,4/1,4} = 573 \cdot 10^{-0,286} = 296 \text{ K}$$

Obliczamy objętości właściwe i objętości całkowite

$\cdot p_1 v_1 = R T_1$, skąd :

$$v_1 = R T_1 / p_1 = 287 \cdot (300 + 273) / 10^6 = 0,164 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$V_1 = m v_1 = 3 \cdot 0,164 = 0,49 \text{ m}^3$$

$$v_2 = R T_2 / p_2 = 287 \cdot 296 / 10^5 = 0,85 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$V_2 = m v_2 = 3 \cdot 0,85 = 2,55 \text{ m}^3$$

Praca zewnętrzna

$$\cdot l_z = - \Delta u = c_v (T_1 - T_2) = R / (k - 1) \cdot (T_1 - T_2) = 287 / 0,4 \cdot (573 - 296) = 198 750 \text{ J}$$

$$L_z = m l_z = 3 \cdot 198,8 \cdot 10^3 = 596 \cdot 10^3 \text{ J} = 596 \text{ kJ}$$

Uwaga : zadanie zawiera elementy obliczeń, których opanowanie powinno być pomocne przy wykonywaniu sprawozdania z ćwiczenia laboratoryjnego nr 7.

Literatura:

1. B. Staniszewski: Termodynamika. PWN, 1986.
2. S. Wilk :Termodynamika techniczna, Wyd. Szk. i Pedag. W-wa 1989.
3. S. Wiśniewski: Termodynamika Techniczna, WNT, W-wa 1987.
4. Sz. Szczeniowski: Fizyka doświadczalna. Cz. II. Ciepło i fizyka drobinowa. PWN, W-wa, 1964.
5. F. Kohlrausch: Fizyka laboratoryjna. PWN, W-wa 1959.

Wersja 40

Na następnej stronie arkusz obliczeniowy (strona 16)

Imię	Nazwisko	Data	Rok II.	Grupa	39
		.12.2009	1 2 3		

Sprawozdanie z ćwiczenia laboratoryjnego nr 7

Z₇ = **Badanie parametrów przemiany izotermicznej i adiabatycznej na przykładzie powietrza**

1. Dane ogólne dla badanego gazu (powietrze wilgotne *):

$$p_b = p_{ot} = \dots\dots\dots \text{hPa}; \quad p_{1n} = \dots\dots\dots \text{mm H}_2\text{O}; \quad p_{2n} = \dots\dots\dots \text{mm H}_2\text{O}$$

$$t_{ot} = 18-25 \dots\dots\dots ^\circ\text{C}; \quad c_{p,\text{pow}} = 1023 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}); \quad R_{\text{pow}} = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

2. Obliczenie wykładnika k metodą Clementa (metoda małych ciśnień)

a) obliczenie p_1 i p_2 (należy dopasować jednostki składników równania)

$$p_1 = p_{ot} + p_{1n} = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ [Pa]}$$

$$p_2 = p_{ot} + p_{2n} = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ [Pa]}$$

b) obliczenie k

$$k = \frac{p_{1n}}{p_1 - p_2} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \text{ podaj jednostkę : } \quad \boxed{}$$

3. Obliczenie wykładnika k metodą Lummera (dowolne ciśnienie)

$$k = \frac{\ln(p_{ot}/p_1)}{\ln(p_2/p_1)} = \frac{\ln(\dots\dots\dots/\dots\dots\dots)}{\ln(\dots\dots\dots/\dots\dots\dots)}; \quad k = \dots\dots\dots \text{ (4 miejsca znaczn. np. 1,342)}$$

4. Określenie temperatury końca przemiany adiabatycznej (etap III) jako początku izochorycznego sprężania gazu przy pobieraniu ciepła z otoczenia (IV etap eksperymentu)

$$T_1 = T_{ot} = \dots\dots\dots \text{K}; \quad T_2 = \frac{p_{ot} \cdot T_{ot}}{p_2} = \frac{\dots\dots\dots \cdot \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \text{K}$$

5. Obliczenie ciepła właściwego $c_{v,\text{pow}}$ i przyrostu energii wewnętrznej

$$c_{v,\text{pow}} = c_{p,\text{pow}} - R_{\text{pow}} = \dots\dots\dots \text{ [J}/(\text{kg} \cdot \text{K})] \text{ (równanie Mayera)}$$

$$\Delta u = \dots\dots\dots (T_2 - T_1) = \dots\dots\dots (\dots\dots\dots - \dots\dots\dots) = \dots\dots\dots \text{ [J/kg]}$$

6. Obliczenie pracy zewnętrznej (podaj wzór !)

$$l_z = \dots\dots\dots \text{ [J/ kg]}$$

7. Obliczenie pracy technicznej i zmiany entalpii (wzór !)

$$l_t = \dots\dots\dots \text{ [J/kg]}; \quad \Delta i = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ [J/kg]}$$

8. Teoretyczna wartość wykładnika adiabaty dla powietrza

$$k_{\text{teor}} = c_{p,\text{pow}}/c_{v,\text{pow}} = \dots\dots\dots / \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

9. Obliczenie objętości właściwych dla badanej adiabaty (na odwrocie)

$$10. \text{ Współczynnik weryfikacyjny } Z_7 = \frac{\Delta u + l_z - \Delta i}{l_t} = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

Jeżeli Z_7 nie mieści się w granicach $0.95 \div 1.05$, to obliczenia należy powtórzyć.Na odwrocie: wspólny wykres adiabaty (CD), izochory (DE) i wirtualnej izotermy (CE) w układzie pracy $p - v$ (po obliczeniu objętości właściwych v_1 i v_2), wnioski.

Liczba innych osób posiadających takie same wyniki lub/ i wnioski wynosi : (0 – 15)

* uwaga: indeks 'pow' oznacza powietrze

** wersja W39 (8-12-2009)